参考答案

扫码获取
详解详析

训练 1　集合与常用逻辑用语、不等式

1. C 【解析】对于 A,集合 A 为数集,集合 B 为点集,显然二者不能相等;对于 B,$A=\{y|y=x^2+1\}=\{y|y\geqslant 1\}$,显然 $0\notin A$;对于 C,当 $x=1$ 时,$y=1^2+1=2$,所以$(1,2)\in B$;对于 D,当 $x=0$ 时,$y=1$,所以$(0,0)\notin B$. 故选 C.
2. C 【解析】由题得 $A=\{x|x^2-3x-4\leqslant 0\}=[-1,4]$,$B=\{x|2x-3>0\}=\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$,则 $A\cup B=[-1,+\infty)$. 故选 C.
3. B 【解析】不等式 $x^2<x$ 的解集为$(0,1)$. 对于 A,不等式 $x<1$ 的解集为$(-\infty,1)$,不满足题意;对于 B,不等式$\frac{1}{x}>1$ 的解集为$(0,1)$,满足题意;对于 C,由$|x^2-x|=x-x^2$,得 $x^2-x\leqslant 0$,则解集为$[0,1]$,不满足题意;对于 D,由 $3^{x^2}>3^x$,得 $x^2>x$,则解集为$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$,不满足题意. 故选 B.
4. B 【解析】对任意 $x\in\mathbf{R}$,关于 x 的不等式 $x^2-ax+a>0$ 恒成立,等价于 $\Delta=(-a)^2-4a<0$,解得 $0<a<4$,则"$0<a<4$"的一个充分不必要条件是"$0<a<1$". 故选 B.
5. A 【解析】因为"$\exists x\in[-1,1]$,$x^2-4x-2m+1>0$"为假命题,所以"$\forall x\in[-1,1]$,$x^2-4x-2m+1\leqslant 0$"为真命题. 设 $f(x)=x^2-4x-2m+1$,则易知 $f(x)=x^2-4x-2m+1$ 在$[-1,1]$上单调递减,所以只需满足 $f(-1)=(-1)^2-4\times(-1)-2m+1\leqslant 0$,解得 $m\geqslant 3$,即实数 m 的取值范围为$[3,+\infty)$. 故选 A.
6. D 【解析】因为 $a>0,b>0$,且$\frac{a+1}{a}+\frac{3}{b}=2$,所以$\frac{1}{a}+\frac{3}{b}=1$,所以 $3a+b=(3a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{3}{b}\right)=3+3+\frac{b}{a}+\frac{9a}{b}\geqslant 6+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{9a}{b}}=6+2\times 3=12$,当且仅当 $b=3a$,即 $a=2$,$b=6$ 时取等号. 故选 D.
7. B 【解析】由 $\cos x=0$,得 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 由 $\sin x=1$,得 $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi,n\in\mathbf{Z}$. 因为$\left\{x\,\middle|\,x=\frac{\pi}{2}+2n\pi,n\in\mathbf{Z}\right\}\subsetneqq\left\{x\,\middle|\,x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$,所以"$\cos x=0$"是"$\sin x=1$"的必要不充分条件. 故选 B.
8. B 【解析】因为 p 是 r 的充分不必要条件,所以 $p\Rightarrow r$,r 推不出 p. 因为 q 是 r 的充分条件,所以 $q\Rightarrow r$. 因为 s 是 r 的必要条件,所以 $r\Rightarrow s$. 因为 q 是 s 的必要条件,所以 $s\Rightarrow q$. 因为 $q\Rightarrow r$,$r\Rightarrow s$,所以 $q\Rightarrow s$,又 $s\Rightarrow q$,所以 s 是 q 的充要条件,①正确;因为 $p\Rightarrow r$,$r\Rightarrow s$,$s\Rightarrow q$,所以 $p\Rightarrow q$,因为 $q\Rightarrow r$,r 推不出 p,所以 q 推不出 p,所以 p 是 q 的充分不必要条件,②正确;因为 $r\Rightarrow s$,$s\Rightarrow q$,所以 $r\Rightarrow q$,又 $q\Rightarrow r$,所以 r 是 q 的充要条件,③错误;因为 $s\Rightarrow q$,$q\Rightarrow r$,所以 $s\Rightarrow r$,又 $r\Rightarrow s$,所以 r 是 s 的充要条件,④错误. 故选 B.
9. AD 【解析】对于 A,因为 $a>b>0$,所以 $ab>0$,所以$\frac{a}{ab}>\frac{b}{ab}$,所以$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,所以 A 中不等式恒成立;对于 B,当 $c=0$ 时,$ac^2=bc^2$,所以 B 中不等式不恒成立;对于 C,因为 a,c 的大小关系不确定,所以无法比较 2^a,2^c 的大小,所以 C 中不等式不一定成立;对于 D,因为 $a>b>0$,所以 $a^2>ab>0$,因为 $y=\lg x$ 为$(0,+\infty)$上的增函数,所以 $\lg a^2>\lg(ab)$,所以 D 中不等式恒成立. 故选 AD.
10. ABD 【解析】对于 A,由 $x>3$ 不一定能推出 $x>5$,而由 $x>5$ 一定能推出 $x>3$,则"$x>3$"是"$x>5$"的必要不充分条件,故 A 正确;对于 B,若 $ac<0$,则 $\Delta=b^2-4ac>0$,$x_1x_2=\frac{c}{a}<0$,所以一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个根,且一个正根一个负根,若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个正根一个负根,则 $x_1x_2=\frac{c}{a}<0$,则 $ac<0$,所以"$ac<0$"是"一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个正根一个负根"的充要条件,故 B 正确;对于 C,若 $x+y\geqslant 4$,则不一定能推出 $x\geqslant 2$ 且 $y\geqslant 2$,若 $x\geqslant 2$ 且 $y\geqslant 2$,则一定能推出 $x+y\geqslant 4$,所以"$x+y\geqslant 4$"是"$x\geqslant 2$ 且 $y\geqslant 2$"的必要不充分条件,故 C 不正确;对于 D,若 $x^2-4x+3\neq 0$,则 $x\neq 1$ 且 $x\neq 3$,所以由 $x\neq 1$ 不一定能推出 $x^2-4x+3\neq 0$,而由 $x^2-4x+3\neq 0$ 一定能推出 $x\neq 1$,所以"$x\neq 1$"是"$x^2-4x+3\neq 0$"的必要不充分条件,故 D 正确. 故选 ABD.
11. ACD 【解析】由 $x>0,y>0$ 且 $x+y=xy$,得$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$. 对于 A,$x+y=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=4$,当且仅当 $x=y=2$ 时取等号,故 A 正确. 对于 B,由 $x+y=xy$,$x+y\geqslant 4$,得 $xy\geqslant 4$,故 B 错误. 对于 C,因为 $x+y=xy$,所以 $x=\frac{y}{y-1}$,又 $x>0,y>0$,所以 $y>1$,则 $x+2y+xy=\frac{y}{y-1}+2y+\frac{y^2}{y-1}=3(y-1)+\frac{2}{y-1}+5\geqslant 2\sqrt{3(y-1)\cdot\frac{2}{y-1}}+5=5+2\sqrt{6}$,当且仅当$\frac{2}{y-1}=3(y-1)$,即 $y=1+\frac{\sqrt{6}}{3}$时取等号,所以 $x+2y+xy$ 的最小值为 $5+2\sqrt{6}$,故 C 正确. 对于 D,$\frac{2x}{x-1}+\frac{4y}{y-1}=\frac{2x(y-1)+4y(x-1)}{(x-1)(y-1)}=4x+2y=(4x+2y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=6+\frac{2y}{x}+\frac{4x}{y}\geqslant 6+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}=6+4\sqrt{2}$,当且仅当$\frac{2y}{x}=\frac{4x}{y}$时取等号,故 D 正确. 故选 ACD.
12. $\exists x\in[-2,+\infty)$,$x+3<1$　【解析】命题"$\forall x\in[-2,+\infty)$,$x+3\geqslant 1$"的否定是"$\exists x\in[-2,+\infty)$,$x+3<1$".
13. $[2,+\infty)$　【解析】因为"$\exists x\in[-1,2]$,$x-a>0$"是假命题,所以"$\forall x\in[-1,2]$,$x-a\leqslant 0$"是真命题. 所以对任意 $x\in[-1,2]$,$a\geqslant x$ 恒成立,所以 $a\geqslant 2$,即实数 a 的取值范围是$[2,+\infty)$.
14. $\frac{8}{9}$　【解析】因为$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1$,所以 $2x+y=xy$,又 $x>0$,$y>0$,所以$\frac{2x+y}{xy+1}=\frac{xy}{xy+1}=\frac{xy+1-1}{xy+1}=1-\frac{1}{xy+1}$,故当 xy 取最小值时$\frac{2x+y}{xy+1}$取最小值. 因为 $x>0$,$y>0$,所以 $xy=2x+y\geqslant 2\sqrt{2xy}$,当且仅当 $x=2$,$y=4$ 时取等号,可得 $xy\geqslant 8$,故$\frac{2x+y}{xy+1}$的最小值为 $1-\frac{1}{8+1}=\frac{8}{9}$.

训练 2　函数

1. B 【解析】由题意知 $f[f(3)]=f\left(\ln\frac{e^3+1}{e^3-1}\right)=\ln\frac{e^{\ln\frac{e^3+1}{e^3-1}}+1}{e^{\ln\frac{e^3+1}{e^3-1}}-1}=$

$\ln\dfrac{\dfrac{e^3+1}{e^3-1}+1}{\dfrac{e^3+1}{e^3-1}-1}=\ln e^3=3$. 故选 B.

2. D 【解析】对于 A, $f(x)=x^3$, $f(y)=y^3$, $f(x+y)=(x+y)^3$, 不满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$, 故 A 不满足题意;对于 B, $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,不满足 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,故 B 不满足题意;对于 C, $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$, $f(y)=y^{\frac{2}{3}}$, $f(x+y)=(x+y)^{\frac{2}{3}}$, 不满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$, 故 C 不满足题意;对于 D, $f(x)=e^x$, $f(y)=e^y$, $f(x+y)=e^{x+y}$, 满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$, 且 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,故 D 满足题意. 故选 D.

3. B 【解析】因为函数 $g(x)=f(x)+x^2$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $g(-2)=-g(2)$, 又 $g(x-4)=g(x)$, 所以 $g(-2)=g(2)$, 可得 $g(-2)=g(2)=0$, 则 $g(-6)=g(-2)=0$, 所以 $g(-6)=f(-6)+(-6)^2=0$, 所以 $f(-6)=-36$. 故选 B.

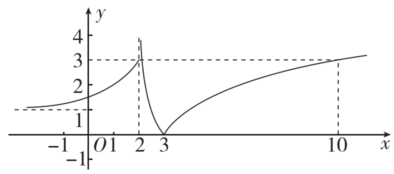
4. C 【解析】因为 $f(x+2)=-f(x)$, 所以 $f(x+4)=-f(x+2)=-[-f(x)]=f(x)$, 所以 4 为 $f(x)$ 的周期. 因为 $\frac{2023}{2}=4\times253-\frac{1}{2}$, 所以 $f\left(\frac{2023}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)=-\left(\log_2\frac{3}{2}+1\right)=-\log_2 3$. 故选 C.

5. B 【解析】对于 A, $f(x)=\ln|x|+\sin x$, 函数定义域为 $\{x|x\neq0\}$, 因为 $f(-x)=\ln|x|-\sin x\neq f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 不是偶函数,不符合题意;对于 C, $f(x)=\ln|x|+\cos x$, 则 $f(\pi)=\ln\pi-1<1$, 不符合题意;对于 D, $f(x)=\ln|x|-\sin x$, 函数定义域为 $\{x|x\neq0\}$, 因为 $f(-x)=\ln|x|+\sin x\neq f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 不是偶函数,不符合题意. 故选 B.

6. B 【解析】因为 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数,所以 $f(-1)=-f(1)$, $f(0)=0$, 因为当 $x\in(0,1]$ 时, $f(x)=ax(x-2)$, 所以 $f(1)=-a$, 从而 $f(-1)=a$. 因为 $f(x+1)$ 是偶函数,所以 $f(x+1)=f(-x+1)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,则 $f(2)=f(0)=0$, 因为 $f(-1)+f(2)=-1$, 所以 $a+0=a=-1$. 因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,所以 $f\left(\frac{7}{2}\right)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-2\right)=\frac{3}{4}$, 所以 $f\left(\frac{7}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$. 故选 B.

7. C 【解析】因为对任意 $0<x_1<x_2$ 都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<1$, 所以 $f(x_2)-x_2<f(x_1)-x_1$ 恒成立. 设 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(x_2)<g(x_1)$ 恒成立,所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 因为 $f(x)$ 为奇函数,所以 $g(-x)=f(-x)+x=-f(x)+x=-g(x)$, 所以 $g(x)$ 为奇函数,则 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减. 由题意知 $g(1)=f(1)-1=0$, 则 $g(-1)=-g(1)=0$, 不等式 $f(x)-x>0$ 即 $g(x)>0$, 结合以上分析可知,该不等式的解集为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$. 故选 C.

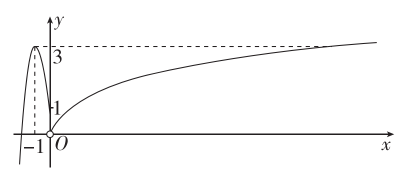
8. A 【解析】作出函数 $f(x)$ 的图象,如图所示,设 $f(x)=t$, 由图可知,要使关于 x 的方程 $[f(x)]^2-(a+8)f(x)-a=0$ 有 6 个不同的实数根,需满足关于 t 的方程 $t^2-(a+8)t-a=0$ 在 $t\in(1,3]$ 时有两个不同的实数根,需满足 $\begin{cases}[-(a+8)]^2-4\times1\times(-a)>0,\\1<\frac{a+8}{2}<3,\\1-(a+8)-a>0,\\9-3(a+8)-a\geq0,\end{cases}$ 解得 $-4<a\leq-\frac{15}{4}$, 所以实数 a 的取值范围为 $\left(-4,-\frac{15}{4}\right]$.



9. CD 【解析】对于 A, 函数 $t=-x^2+1$ 的最大值为 1, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,所以 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$, A 错误;对于 B, 因为函数 $y=\log_a(2-ax)$ ($a>0$ 且 $a\neq1$) 在 $(0,1)$ 上单调递减,所以 $\begin{cases}a>1,\\2-a\geq0,\end{cases}$ 解得 $1<a\leq2$, 则 a 的取值范围是 $(1,2]$, B 错误;对于 C, 函数 $y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$ 互为反函数,在同一平面直角坐标系中两个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称, C 正确;对于 D, 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内有 1012 个零点,则函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点个数为 1012, 且 $f(0)=0$, 故函数 $f(x)$ 的零点个数为 2025, D 正确. 故选 CD.

10. AD 【解析】令 $x=y=1$, 得 $f(1)=f(1)+f(1)$, 则 $f(1)=0$, 故 A 正确. 由题意可知 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$, 则 $f(x)$ 是非奇非偶函数,故 B 错误. 对任意 $x>1$, $y>0$, $xy>y$ 恒成立,因为 $f(xy)=f(x)+f(y)$, 所以 $f(xy)-f(y)=f(x)$, 因为当 $x>1$ 时, $f(x)>0$ 恒成立,所以 $f(xy)-f(y)>0$ 恒成立,则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,故 C 错误. 令 $x=y=2$, 得 $f(4)=2f(2)$, 因为 $f(4)=12$, 所以 $f(2)=6$, 因为 $f(xy)=f(x)+f(y)$, 所以 $f(xy)-f(y)=f(x)$, 所以 $f(x+3)-f\left(\frac{2}{x}\right)=f\left(\frac{x^2+3x}{2}\right)$, 所以 $f(x+3)-f\left(\frac{2}{x}\right)<6$ 等价于 $f\left(\frac{x^2+3x}{2}\right)<f(2)$, 因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $\begin{cases}x+3>0,\\\frac{2}{x}>0,\\\frac{x^2+3x}{2}<2,\end{cases}$ 解得 $0<x<1$, 则所求不等式的解集是 $(0,1)$, 故 D 正确. 故选 AD.

11. CD 【解析】当 $x\leq0$ 时, $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$, 所以当 $x\in(-\infty,-1)$ 时, $f(x)$ 单调递增,当 $x\in(-1,0]$ 时, $f(x)$ 单调递减,又当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $f(x)$ 单调递增,所以可作出 $f(x)$ 的大致图象(横、纵坐标单位长度不同),如图所示.



对于 A 选项,方程 $f(x)=1$ 有三个不相等的实数根,故 A 错误;对于 B 选项,方程 $f(x)=m$ 的根等价于函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=m$ 的交点的横坐标,因为方程 $f(x)=m$ 有两个不相等的实数根,所以由图可知实数 m 的取值范围是 $(0,1)\cup\{3\}$, 故 B 错误;对于 C 选项,令 $f(x)=t$, 方程 $f(t)=1$ 的根为 $t_1=-\sqrt{3}$, $t_2=0$, $t_3=e-1$, 由图可知方程 $f(x)=-\sqrt{3}$ 有一个根,方程 $f(x)=0$ 有一个根,方程 $f(x)=e-1$ 有三个根,且这五个根互不相等,所以方程 $f[f(x)]=1$ 有五个互不相等的实数根,故 C 正确;对于 D 选项,令 $f(x)=m$, 则易知方程 $m^2-2am+a^2-1=0$ 的根为 $m=a+1$ 或 $m=a-1$, 因为方程 $[f(x)]^2-2af(x)+a^2-1=0$ 有四个互不相等的实数根,所以结合 $f(x)$ 的图象知 $\begin{cases}a+1>3,\\1\leq a-1<3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+1=3,\\0<a-1<1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1\leq a+1<3,\\a-1\leq0\end{cases}$ 或

$\begin{cases}0<a+1<1,\\0<a-1<1,\end{cases}$解得 $0\leqslant a\leqslant 1$ 或 $2<a<4$,即实数 a 的取值范围是 $[0,1]\cup(2,4)$,故 D 正确. 故选 CD.

12. $-x$ 【解析】当 $x\in[-1,0)$ 时,$x+2\in[1,2)$,所以 $f(x)=-f(x+2)=-(x+2-2)=-x$.

13. $2\sqrt{2}$ 【解析】因为函数 $y=f(x)+e^x$ 是偶函数,所以 $f(-x)+e^{-x}=f(x)+e^x$,则 $f(x)-f(-x)=e^{-x}-e^x$ ①. 因为函数 $y=f(x)-3e^x$ 是奇函数,所以 $f(-x)-3e^{-x}=-f(x)+3e^x$,则 $f(x)+f(-x)=3e^x+3e^{-x}$ ②. 联立①②可得 $f(x)=e^x+2e^{-x}$. 由基本不等式可得 $f(x)=e^x+2e^{-x}\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot 2e^{-x}}=2\sqrt{2}$,当且仅当 $e^x=2e^{-x}$,即 $x=\frac{1}{2}\ln 2$ 时,等号成立,故函数 $f(x)$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

14. $(-\infty,-5]\cup[5,+\infty)$ 【解析】令 $g(a)=-2am+m^2-\frac{14}{3}$,由题意可知,当 $a\in[-2,2]$,$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 时,$g(a)_{\min}\geqslant f(x)_{\min}$. 易知 $f(x)=\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上单调递增,故 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$. ①当 $m<0$ 时,$g(a)$ 在 $[-2,2]$ 上单调递增,则 $g(a)_{\min}=g(-2)=m^2+4m-\frac{14}{3}\geqslant\frac{1}{3}$,所以 $m^2+4m-5=(m+5)(m-1)\geqslant 0$,可得 $m\leqslant -5$;②当 $m=0$ 时,$g(a)=-\frac{14}{3}<f(x)_{\min}=\frac{1}{3}$,不符合题意;③当 $m>0$ 时,$g(a)$ 在 $[-2,2]$ 上单调递减,则 $g(a)_{\min}=g(2)=m^2-4m-\frac{14}{3}\geqslant\frac{1}{3}$,所以 $m^2-4m-5=(m+1)(m-5)\geqslant 0$,可得 $m\geqslant 5$. 综上所述,实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-5]\cup[5,+\infty)$.

训练 3 滚动练习

1. B 【解析】因为集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$,$B=\{x\mid y=\ln(x^2-5x-6)\}=\{x\mid x^2-5x-6>0\}=\{x\mid x>6$ 或 $x<-1\}$,所以 $A\cap B=\{-2\}$. 故选 B.

2. C 【解析】因为集合 $\{a^2,0,-1\}=\{a,b,0\}$,所以 $\begin{cases}a^2=a,\\b=-1\end{cases}$ ① 或 $\begin{cases}a^2=b,\\a=-1\end{cases}$ ②. 由①得 $\begin{cases}a=0,\\b=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\b=-1,\end{cases}$ 其中 $\begin{cases}a=0,\\b=-1\end{cases}$ 不满足集合中元素的互异性,舍去;$\begin{cases}a=1,\\b=-1\end{cases}$ 符合题意,此时 $ab=-1$. 由②得 $\begin{cases}b=1,\\a=-1,\end{cases}$ 符合题意,此时 $ab=-1$. 综上,$ab=-1$. 故选 C.

3. A 【解析】因为 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{2k+1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,$B=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k+2}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,且 $2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 表示奇数,$k+2(k\in\mathbf{Z})$ 表示整数,故按子集的定义必有 $A\subsetneqq B$. 故选 A.

4. B 【解析】因为 q 是 p 的必要条件,所以 $\begin{cases}m-1\geqslant 2,\\m+1\leqslant 6,\end{cases}$ 解得 $3\leqslant m\leqslant 5$,所以实数 m 的取值范围为 $[3,5]$. 故选 B.

5. D 【解析】由 $36=6^2>(3^{\frac{3}{2}})^2=27$,得 $\log_3 6^2>\log_3(3^{\frac{3}{2}})^2$,即 $\log_3 6>\log_3 3^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$,故 $1<c<a$. 因为 $b=\log_{0.5}2=\log_{\frac{1}{2}}2=-1$,所以 $a>c>b$. 故选 D.

6. A 【解析】$xy=\frac{1}{36}\times 4x\times 9y\leqslant\frac{1}{36}\left(\frac{4x+9y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,当且仅当 $4x=9y=3$,即 $x=\frac{3}{4}$,$y=\frac{1}{3}$ 时取等号,所以 xy 的最大值为 $\frac{1}{4}$. 故选 A.

7. D 【解析】因为当 $x_1\neq x_2$ 且 $x_1,x_2\in(2,+\infty)$ 时,$[f(x_2)-f(x_1)]\cdot(x_2-x_1)<0$ 恒成立,所以函数 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减. 又函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称,所以 $a=f(-1)=f(5)$,$b=f(0)=f(4)$,而 $2<3<4<5$,因此 $f(3)>f(4)>f(5)$,所以 $c>b>a$. 故选 D.

8. C 【解析】$\because f(3x-2)$ 为偶函数,$\therefore f(-3x-2)=f(3x-2)$,$\therefore f(-x-2)=f(x-2)$,故 $f[-(-x-2)-2]=f(-x-2-2)$,即 $f(x)=f(-x-4)$,$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称. $\because f(2x-1)$ 为奇函数,$\therefore f(-2x-1)=-f(2x-1)$,$\therefore f(x-1)=-f(-x-1)$,$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 对称,故 B 错误,C 正确. 由 $f(x)=f(-x-4)$ 及 $f(x-1)=-f(-x-1)$ 知,$f(x)=f(-x-4)=-f(x+2)$,$\therefore f(x+2)=-f(x+4)$,故 $f(x)=f(x+4)$,$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的周期为 4,故 A 错误. $f(2023)=f(506\times 4-1)=f(-1)=0$,故 D 错误. 故选 C.

9. AD 【解析】对于 A,$f(x)=\begin{cases}x,x\geqslant 0,\\-x,x<0,\end{cases}$ $g(t)=|t|=\begin{cases}t,t\geqslant 0,\\-t,t<0,\end{cases}$ 因为 $f(x)$ 与 $g(t)$ 的定义域和解析式均一致,所以 $f(x)$ 与 $g(t)$ 表示同一函数,故 A 正确;对于 B,$\varphi(x)$ 的分母不能为 0,所以 $x\neq 1$,又由 $0\leqslant x+1\leqslant 2$,得 $-1\leqslant x\leqslant 1$,所以 $\varphi(x)$ 的定义域为 $[-1,1)$,故 B 不正确;对于 C,若 $(a-1)(a-2)=0$,则 $a=1$ 或 $a=2$,所以“$a=2$”是“$(a-1)(a-2)=0$”的充分不必要条件,故 C 不正确;对于 D,若函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象过点 $(-1,0)$,则 $a-b+c=0$,若 $a-b+c=0$,则当 $x=-1$ 时,$y=a-b+c=0$,即函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象过点 $(-1,0)$,故“函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象过点 $(-1,0)$”是“$a-b+c=0$”的充要条件,故 D 正确. 故选 AD.

10. BC 【解析】由函数 $f(x+1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,可得 $f[(1+x)+1]=f[(1-x)+1]$,即 $f(x+2)=f(2-x)$,则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称,故选项 C 正确;由函数 $f(2x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称,可得 $f(2x-1)+f[2(2-x)-1]=0$,即 $f(2x-1)+f(3-2x)=0$,则 $f(x-1)+f(3-x)=0$,所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称,可得 $f(x)+f(2-x)=0$,所以 $f(2-x)=-f(x)$,结合 $f(x+2)=f(2-x)$ 可得 $f(x+2)=-f(x)$,所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,故选项 B 正确;所以 $f(x)$ 是周期函数,且周期为 4,其图象不仅关于直线 $x=2$ 对称还关于点 $(1,0)$ 对称,所以其图象不关于点 $(0,0)$ 和 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 对称,所以 $f(x)$ 不是奇函数,$f(x)+f(1-x)\neq 0$,故选项 A,D 错误. 故选 BC.

11. ABC 【解析】令 $x=y=0$,可得 $f(0)=0$,故 A 正确;令 $x=y=1$,可得 $f(1)=f(1)+f(1)$,即 $f(1)=0$,故 B 正确;令 $x=y=-1$,则 $f(1)=f(-1)+f(-1)$,可得 $f(-1)=0$,令 $x=-1$,$y=x$,可得 $f[(-1)\times x]=x^2\times f(-1)+(-1)^2\times f(x)$,即 $f(-x)=f(x)$,故 $f(x)$ 是偶函数,故 C 正确;设函数 $f(x)=0$,此时满足 $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$,但函数 $f(x)$ 没有极值点,故 D 错误. 故选 ABC.

12. 1 【解析】易知 $a\neq 0$. $\because\left\{1,a,\frac{b}{a}\right\}=\{0,a^2,a+b\}$,$\therefore\frac{b}{a}=0$,即 $b=0$,$\therefore a^2=1$,即 $a=\pm 1$. 又由集合中元素的互异性知 $a\neq 1$,$\therefore a=-1$,故 $a^{2022}+b^{2023}=(-1)^{2022}+0^{2023}=1$.

13. $[1,+\infty)$ 【解析】易知函数 $g(x)=\frac{2}{x-1}$ 在 $[2,3]$ 上单调递减,所以当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时,$1\leqslant g(x)\leqslant 2$,设 $B=[1,2]$. 由函数 $f(x)=ax+2(a>0)$ 在区间 $[-1,2]$ 上单调递增,可得当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$-a+2\leqslant f(x)\leqslant 2a+2$,设 $A=[-a+2,2a+2]$. 因为存在 $x_1\in[-1,2]$,使得对任意的 $x_2\in[2,3]$,都有 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立,即 $B\subseteq A$,所以 $\begin{cases}-a+2\leqslant 1,\\2a+2\geqslant 2,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant 1$,即实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

14. $[0,4]$ 【解析】①当 $a<0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单

调递减,因此 $f(x)$ 不存在最大值. ②当 $a=0$ 时,$f(x)=\begin{cases}-9, x<0,\\ 8-(x-3)^2, x\geqslant 0,\end{cases}$ 当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)_{\max}=f(3)=8>-9$,故函数 $f(x)$ 存在最大值. ③当 $0<a\leqslant 3$ 时,当 $x\geqslant a$ 时,$f(x)=8-(x-3)^2\leqslant 8$;当 $x<a$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递增,此时 $f(x)<a^2-9$. 因为 $f(x)$ 存在最大值,所以 $a^2-9\leqslant 8$,故 $0<a\leqslant 3$. ④当 $a>3$ 时,函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递减,当 $x\geqslant a$ 时,$f(x)\leqslant f(a)=8-(a-3)^2$;当 $x<a$ 时,$f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递增,此时 $f(x)<a^2-9$. 因为 $f(x)$ 存在最大值,所以 $8-(a-3)^2\geqslant a^2-9$,解得 $-1\leqslant a\leqslant 4$,又 $a>3$,所以 $3<a\leqslant 4$. 综上可得,a 的取值范围是 $[0,4]$.

训练 4 一元函数的导数及应用

1. A **[解析]** ∵$f(3)=11$,$f(1)=3$,∴该函数在区间 $[1,3]$ 上的平均变化率为 $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{11-3}{3-1}=4$. 故选 A.

2. D **[解析]** 由题可知 $f'(x_0)=2$,∴$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-2\Delta x)}{\Delta x}=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-2\Delta x)}{2\Delta x}=2f'(x_0)=4$. 故选 D.

3. C **[解析]** 由题图可知,点 $(2,0)$,$(0,-1)$ 均在切线上,∴切线的斜率 $k=\dfrac{0-(-1)}{2-0}=\dfrac{1}{2}=f'(1)$. 故选 C.

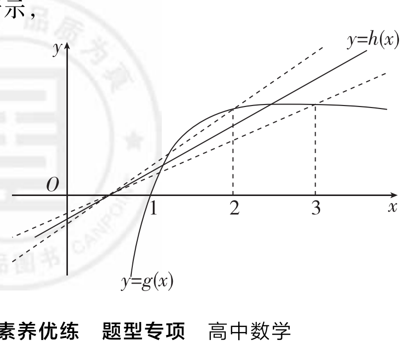
4. D **[解析]** $[(1-2x)^2]'=2(1-2x)\cdot(-2)=8x-4$,$\left(\cos\dfrac{\pi}{5}\right)'=0$,$[\ln(3x)]'=\dfrac{3}{3x}=\dfrac{1}{x}$,$(x\cdot\cos x)'=\cos x-x\sin x$. 故选 D.

5. A **[解析]** 因为函数 $f(x)$ 的图象在点 $P(5,f(5))$ 处的切线方程是 $y=-x+8$,所以 $f(5)=-5+8=3$,$f'(5)=-1$,故 $f(5)+f'(5)=2$,故选 A.

6. A **[解析]** 设 $F(x)=f(x)e^x$,则 $F'(x)=f'(x)e^x+f(x)e^x=e^x[f(x)+f'(x)]>0$,所以 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 又 $f(3)=3$,所以 $F(3)=f(3)\cdot e^3=3e^3$,所以 $f(x)>3e^{3-x}$ 等价于 $f(x)e^x>3e^3$,即 $F(x)>F(3)$,所以 $x>3$,即不等式的解集为 $(3,+\infty)$. 故选 A.

7. D **[解析]** 设 $f(x)=x^{\frac{1}{2023}}$,则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,故 $f(2022)<f(2023)$,即 $a<b$. 易知 $\ln a=\dfrac{1}{2023}\ln 2022$,$\ln c=\dfrac{1}{2024}\ln 2023$,设 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$,$x>e^2$,则 $g'(x)=\dfrac{\frac{1+x}{x}-\ln x}{(x+1)^2}=\dfrac{1+\frac{1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}<\dfrac{2-\ln x}{(x+1)^2}<0$,$x>e^2$,则 $g(x)$ 在 $(e^2,+\infty)$ 上单调递减,故 $g(2023)<g(2022)$,即 $\ln c<\ln a$,则 $c<a$. 综上可得,$b>a>c$. 故选 D.

8. A **[解析]** $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,由 $f(x)>0$ 有唯一的整数解,得 $\dfrac{3\ln x}{x}>2ax-a$ 有唯一的整数解. 令 $g(x)=\dfrac{3\ln x}{x}$,$x\in(0,+\infty)$,$h(x)=2ax-a$,$x\in(0,+\infty)$,则 $g'(x)=\dfrac{3(1-\ln x)}{x^2}$,令 $g'(x)=0$,解得 $x=e$,易知 $g(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增,在 $(e,+\infty)$ 上单调递减,所以 $g(x)$ 在 $x=e$ 处取得极大值,也是最大值. 作出 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的大致图象,如图所示,



易知 $h(x)$ 的图象恒过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$. 若 $a\leqslant 0$,则显然不符合题意;若 $a>0$,则需满足 $\begin{cases}g(2)>h(2),\\ g(3)\leqslant h(3),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\dfrac{3\ln 2}{2}>4a-a,\\ \dfrac{3\ln 3}{3}\leqslant 6a-a,\end{cases}$ 解得 $\dfrac{\ln 3}{5}\leqslant a<\dfrac{\ln 2}{2}$. 故选 A.

9. BC **[解析]** 由 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象可知,$f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$,$\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 上单调递减,在 $\left(-2,\dfrac{1}{2}\right)$,$(2,+\infty)$ 上单调递增,故当 $x=-2$ 或 $x=2$ 时,$f(x)$ 取得极小值,但 $f(-2)$ 与 $f(2)$ 的大小关系不确定,不能得出最小值,$x=\dfrac{1}{2}$ 是 $f'(x)$ 的零点,但不一定是 $f(x)$ 的零点,故 B,C 正确,A,D 错误,故选 BC.

10. ACD **[解析]** 由 $f(x+2)=-f(x)$,得 $f(1)=f(-1+2)=-f(-1)$,又 $f(x)$ 的图象是由 $f(x-1)$ 的图象向左平移 1 个单位得到的,且 $f(x-1)$ 为奇函数,因此 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 对称,即 $f(-1)=0$,因此 $f(1)=-f(-1)=0$,故 A 选项正确. 由 $f(x+2)=-f(x)$,得 $f(x+4)=-f(x+2)=-[-f(x)]=f(x)$,所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,又因为 $f(2024)=f(4\times 506)=f(0)$,且 $f(0)$ 不确定是否为 0,所以 $f(2024)$ 不确定是否为 0,故 B 选项不正确. 因为 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 对称,所以 $f(x)+f(-2-x)=0$,又 $f(x+2)=-f(x)$,所以 $f(x+2)=f(-2-x)$,即 $f(x+2)=f[-(x+2)]$,所以 $f(x)=f(-x)$,所以 $f'(x)=-f'(-x)$,故 C 选项正确. $f(x)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 对称,即 $f(-1+x)=-f(-1-x)$,两边对 x 求导得 $f'(-1+x)=f'(-1-x)$,结合 $f'(x)=-f'(-x)$,可知 $f'(-1+x)=f'(-1-x)=-f'(1+x)$,所以 $f'(-1+x)=-f'(1+x)$,则 $f'(x)=-f'(x+2)$,所以 $f'(x+4)=-f'(x+2)=f'(x)$,所以 $f'(x)$ 的周期为 4,因此 $f'(2022-x)=f'(2-x)=-f'(4-x)=-f'(-x)$,因为 $f'(x)=-f'(-x)$,所以 $f'(x)=f'(2022-x)$,故 D 选项正确. 故选 ACD.

11. ABD **[解析]** 由题意得,$f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$,则当 $x<1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;当 $x>1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减. 对于 A,$f(2)>f(3)$,故 A 正确. 对于 B,$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值,也是最大值,最大值为 $f(1)=\dfrac{1}{e}$,故 B 正确. 对于 C,当 $x\to-\infty$ 时,$f(x)\to-\infty$,即当 $x\in(-\infty,1)$ 时,$f(x)\in\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right)$;当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to 0$,即当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f(x)\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$. 要使方程 $f(x)-m=0$ 恰有两个不等的实根,则需满足 $0<m<\dfrac{1}{e}$,故 C 错误. 对于 D,令 $F(x)=f(x)-f(2-x)=\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{2-x}{e^{2-x}}=\dfrac{xe^{2-x}-(2-x)e^x}{e^xe^{2-x}}$,$0<x<1$,设 $g(x)=xe^{2-x}-(2-x)e^x$,$0<x<1$,则 $g'(x)=\dfrac{(e^2-e^{2x})(1-x)}{e^x}>0$,∴$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,即 $g(x)<g(1)=0$,故 $xe^{2-x}<(2-x)e^x$ 在 $(0,1)$ 上恒成立,∴$F(x)<0$. 由 $f(x_1)=f(x_2)(x_1<x_2)$ 知,$0<x_1<1<x_2$,∴$f(x_1)=f(x_2)<f(2-x_1)$,又 $2-x_1>1$,$x_2>1$,且 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,∴$x_2>2-x_1$,故 $x_1+x_2>2$,故 D 正确. 故选 ABD.

12. -2 **[解析]** ∵$f(x)=x^2+2f'(1)x$,∴$f'(x)=2x+2f'(1)$,∴$f'(1)=2+2f'(1)$,∴$f'(1)=-2$.

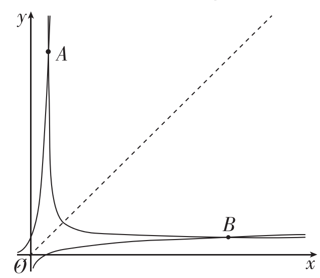
13. $(1,+\infty)$ **[解析]** 设 $g(x)=f(x)-\ln x$,则 $g'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{x}=\dfrac{xf'(x)-1}{x}$,因为 $xf'(x)-1<0$,所以

$g'(x)<0$,所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 又由 $f(\mathrm{e})=2$,得 $g(\mathrm{e})=f(\mathrm{e})-\ln \mathrm{e}=1$,则 $f(\mathrm{e}^x)<x+1\Leftrightarrow f(\mathrm{e}^x)-x<1\Leftrightarrow f(\mathrm{e}^x)-\ln \mathrm{e}^x<1\Leftrightarrow g(\mathrm{e}^x)<g(\mathrm{e})$,则$\mathrm{e}^x>\mathrm{e}$,可得 $x>1$,即不等式的解集为$(1,+\infty)$.

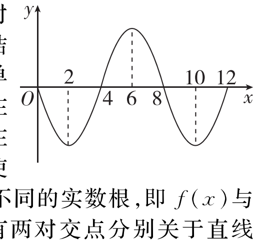
14. $\frac{1}{\mathrm{e}}$ 【解析】因为 x_1,x_2 是方程$|\ln x|=a$ 的两个根,且 $x_1<x_2$,所以 $a>0,\ln x_1=-a,\ln x_2=a$,即 $x_1=\mathrm{e}^{-a},x_2=\mathrm{e}^a$,所以$\frac{a}{x_1x_2^2}=\frac{a}{\mathrm{e}^{-a}\cdot \mathrm{e}^a\cdot \mathrm{e}^a}=\frac{a}{\mathrm{e}^a},a>0$. 令 $g(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^x},x>0$,则 $g'(x)=\frac{1-x}{\mathrm{e}^x}$,易知当 $0<x<1$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,当 $x>1$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,所以当 $x=1$ 时,$g(x)$取得最大值$\frac{1}{\mathrm{e}}$,所以$\frac{a}{x_1x_2^2}$的最大值是$\frac{1}{\mathrm{e}}$.

训练 5 滚动练习

1. D 【解析】原命题为全称量词命题,所以该命题的否定为存在量词命题,即为"$\exists x\in \mathbf{Q},x^2-5=0$".
2. C 【解析】$\because U=\{0,1,2,3,4\},A=\{x\in U\mid x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 3\}=\{0,1,3,4\}$,$\therefore \complement_U A=\{2\}$. 故选 C.
3. B 【解析】关于 x 的方程 $x^2-\sqrt{m}x+1=0$ 有两个不等实根,则$\begin{cases}(\sqrt{m})^2-4=m-4>0,\\ m\geqslant 0,\end{cases}$即 $m>4$,所以"$m>2$"是"关于 x 的方程 $x^2-\sqrt{m}x+1=0$ 有两个不等实根"的必要不充分条件. 故选 B.
4. D 【解析】$f'(x)=2f'\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin x$,$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2f'\left(\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$,$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$,$\therefore f(x)=x+\cos x$,$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.
5. D 【解析】由图象知 $f(x)=0,x\in[0,\pi]$有三个根,经验证只有 A,D 选项满足,排除 B,C 选项. A 选项中函数满足 $f(-x)=-x\sin(-2x)=x\sin 2x=f(x)$,故 A 中函数为偶函数,D 选项中函数满足 $f(-x)=2^{|-x|}\sin(-2x)=-2^{|x|}\sin 2x=-f(x)$,故 D 中函数为奇函数,而图象关于原点对称,所以函数 $y=f(x)$为奇函数,排除 A 选项,故选 D.
6. D 【解析】方法一:结合函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象可知,只有点(a,b)在曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 下方且在 x 轴上方时,过点(a,b)可作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的两条切线,故 $0<b<\mathrm{e}^a$.
方法二:由 $y=\mathrm{e}^x$,得 $y'=\mathrm{e}^x$. 设切点坐标为(t,e^t),则切线方程为 $y-\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t(x-t)$,因为该直线过点$(a,b)$,所以 $b-\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t(a-t)$,即 $\mathrm{e}^t(a-t)+\mathrm{e}^t-b=0$,所以该关于 t 的方程有两个不等的实根. 设 $f(t)=\mathrm{e}^t(a-t)+\mathrm{e}^t-b$,则 $f'(t)=-\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^t(a-t)+\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t(a-t)$. 当 $t<a$ 时,$f'(t)>0$,当 $t>a$ 时,$f'(t)<0$,故 $f(t)$在$(-\infty,a)$上单调递增,在$(a,+\infty)$上单调递减,故 $f(t)_{\max}=f(a)=\mathrm{e}^a-b$,又当 $t\to+\infty$时,$f(t)\to-\infty$,当 $t\to-\infty$时,$f(t)\to-b$,所以只需$-b<0$ 且 $\mathrm{e}^a-b>0$,所以 $0<b<\mathrm{e}^a$. 故选 D.
7. C 【解析】由 $f(x+1)+f(x-1)=2$,得 $f(x+2)+f(x)=2$,即 $f(x+2)=2-f(x)$,所以 $f(x+4)=2-f(x+2)=2-[2-f(x)]=f(x)$,所以函数 $f(x)$的周期为 4,又 $f(x+2)$为偶函数,所以 $f(-x+2)=f(x+2)$,所以 $f(x)=f(4-x)=f(-x)$,所以函数 $f(x)$也为偶函数,又 $f(x+1)+f(x-1)=2$,所以 $f(1)+f(3)=2$,$f(2)+f(4)=2$,所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=4$,又 $f(1)+f(-1)=2$,即 $2f(1)=2$,所以 $f(1)=1$,又 $f(0)+f(2)=2$,$f(0)=2$,所以 $f(2)=0$,所以 $\sum\limits_{k=1}^{115}f(k)=[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]\times 28+f(1)+f(2)+f(3)=4\times 28+2+0=114$,故选 C.
8. D 【解析】已知 a,b,c 均为正实数,$a=b\mathrm{e}^c$,$|\ln a|>|\ln b|$,当 $b=1,c=1$ 时,$a=\mathrm{e}$,满足$|\ln a|=1>|\ln b|=0$,对于 A,$a+b=\mathrm{e}+1>ab=\mathrm{e}$,故 A 错误;对于 B,$a^b=\mathrm{e}>b^a=1$,故 B 错误;对于 C,$c=1>\frac{a-b}{a+b}=\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}+1}$,故 C 错误. 对于 D,由 $a=b\mathrm{e}^c>b\mathrm{e}^0=b$,得 $\ln a-\ln b>0$,由$|\ln a|>|\ln b|$,得$(\ln a)^2-(\ln b)^2>0$,$\therefore \ln a+\ln b>0$,即 $ab>1$,得 $b>\frac{1}{a}$,$\therefore a=b\mathrm{e}^c>\frac{1}{a}\mathrm{e}^c$,即 $a^2>\mathrm{e}^c$,下面证明 $\mathrm{e}^c>c+1,c>0$,设 $f(c)=\mathrm{e}^c-c-1,c>0$,则 $f'(c)=\mathrm{e}^c-1>0$,$\therefore f(c)$在$(0,+\infty)$上单调递增,$\therefore f(c)=\mathrm{e}^c-c-1>f(0)=\mathrm{e}^0-1=0$,$\therefore a^2>c+1$,故 D 正确. 故选 D.
9. ACD 【解析】对于 A,由 $f'(x)$的图象知,当 $x<-1$ 时,$f'(x)<0$,此时函数 $f(x)$单调递减,故 A 中结论错误;对于 B,当$-1<x<3$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$单调递增,则 $f(-1)<f(3)$成立,故 B 中结论正确;对于 C,由图象可知 $f'(3)=f'(5)$,故 C 中结论错误;对于 D,当$-1<x<3$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$单调递增,当 $3<x<5$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$单调递减,则 $x=3$ 是函数 $f(x)$的极大值点,故 D 中结论错误. 故选 ACD.
10. ACD 【解析】当 $x\neq 0$ 时,设 $g(x)=|x|+\frac{4}{|x|}$,$g(x)$在$(0,2]$上单调递减,在$[-2,0)$上单调递增,又 $x\neq 0$ 时,$f(x)=1-\frac{4}{|x|+\frac{4}{|x|}}$,$\therefore f(x)$在$(0,2]$上单调递减,$0\leqslant f(x)<1$,$f(x)$在$[-2,0)$上单调递增,$0\leqslant f(x)<1$,又 $f(0)=1$,$\therefore a,b$ 中至少一个取-2 或 2,可得 $f(x)$在$[0,2]$,$[-2,0]$,$[-1,2]$上的值域为$[0,1]$,$\therefore$整数对(a,b)可以是$(-2,0),(0,2),(-1,2)$. 故选 ACD.
11. BC 【解析】易知函数 $y=\frac{x}{x-1}(x>1)$的图象关于直线 $y=x$ 对称,函数 $y=10^x$ 与 $y=\lg x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,如图,设 $y=\frac{x}{x-1}(x>1)$与$y=10^x$ 的图象的交点为 A,$y=\frac{x}{x-1}(x>1)$与 $y=\lg x$ 的图象的交点为 B,则 $A(x_1,10^{x_1})$与 $B(x_2,\lg x_2)$关于直线 $y=x$ 对称,所以 $x_1=\lg x_2$,$x_2=10^{x_1}$. 又$\frac{x_1}{x_1-1}-10^{x_1}=0$,所以$\frac{x_1}{x_1-1}=10^{x_1}=x_2$,所以 $x_1=x_1x_2-x_2$,即 $x_1+x_2=x_1x_2$,所以$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$,因为 $y=\frac{x}{x-1}(x>1)$的图象与直线 $y=x$ 的交点为$(2,2)$,所以 $x_1+x_2>4$,$x_1x_2=x_1\cdot 10^{x_1}$,$x_1\in(1,2)$,则 $10<x_1x_2<200$. 故选 BC.



12. 13.5 【解析】$\because l(t)=2t^2+1.5t$,$\therefore l'(t)=4t+1.5$,则当 $t=3$ s 时,该运动员的滑雪瞬时速度为 $4\times 3+1.5=13.5(\mathrm{m/s})$.
13. 24 【解析】由 $f(x+2)$为偶函数,得 $f(-x+2)=f(x+2)$,故 $f(-x)=f(x+4)$,又 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(x)=-f(-x)$,所以 $f(x)=-f(x+4)$,故 $f(x+4)=-f(x+8)$,即有 $f(x)=f(x+8)$,所以 $f(x)$的周期为 8,且其图象关于直线 $x=2$ 对称. 由$f(x)$在$[0,2]$上单调递减,结合上述分析知,$f(x)$在$[2,6]$上单调递增,在$[6,10]$上单调递减,在$[10,12]$上单调递增,所以 $f(x)$在$[0,12]$上的大致图象如图. 要使 $f(x)=m$ 在$[0,12]$上恰好有 4 个不同的实数根,即 $f(x)$与 $y=m$ 的图象有 4 个交点,所以必有两对交点分别关于直线 $x=2,x=10$ 对称,则 $x_1+x_2+x_3+x_4=24$.



14. $\left(-\frac{5}{2\mathrm{e}^4},-\frac{2}{\mathrm{e}^4}\right)$ 【解析】$f(x)=\frac{-x^2+4x-4}{\mathrm{e}^x}$的定义域为

R，∴ $f'(x)=\frac{(-2x+4)e^x-(-x^2+4x-4)e^x}{(e^x)^2}=\frac{x^2-6x+8}{e^x}=\frac{(x-2)(x-4)}{e^x}$，∴当 $2<x<4$ 时，$f'(x)<0$，当 $x<2$ 或 $x>4$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$，$(4,+\infty)$ 上单调递增，在 $(2,4)$ 上单调递减，∴ $f(x)_{极大值}=f(2)=0$，$f(x)_{极小值}=f(4)=-\frac{4}{e^4}$，且 $f(x)=\frac{-(x-2)^2}{e^x}\leqslant 0$. 令 $f(x)=t$，要使关于 x 的方程 $[f(x)]^2-2nf(x)+\frac{4}{e^8}=0$ 有 6 个不同的实数根，则方程 $t^2-2nt+\frac{4}{e^8}=0$ 在 $\left(-\frac{4}{e^4},0\right)$ 上有两个不同的实数根，则 $\Delta=4n^2-\frac{16}{e^8}>0$，解得 $n>\frac{2}{e^4}$ 或 $n<-\frac{2}{e^4}$，不妨设方程 $t^2-2nt+\frac{4}{e^8}=0$ 的两个根为 t_1,t_2，且 $t_1<t_2$，则 $t_1t_2=\frac{4}{e^8}>0$，又两根均小于 0，∴ $t_1+t_2=2n<0$，则 $n<-\frac{2}{e^4}$. 令 $g(t)=t^2-2nt+\frac{4}{e^8}$，则有 $-\frac{4}{e^4}<\frac{2n}{2}<0$，∴ $-\frac{4}{e^4}<n<0$，又 $g\left(-\frac{4}{e^4}\right)>0$，∴ $n>-\frac{5}{2e^4}$. 综上，实数 n 的取值范围为 $\left(-\frac{5}{2e^4},-\frac{2}{e^4}\right)$.

训练 6　三角函数、解三角形

1. B 【解析】因为 $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，所以角 α 的终边经过的点为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$，所以 $\sin\alpha=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}=-\frac{1}{2}$.

2. B 【解析】因为 $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha=2$，所以 $\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha+2\tan\alpha}=\frac{1-2^2}{1+2^2+2\times 2}=-\frac{1}{3}$. 故选 B.

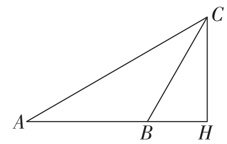
3. B 【解析】在△ABC 中，$a=3$，$c=\sqrt{7}$，$C=60°$，由余弦定理得 $(\sqrt{7})^2=3^2+b^2-2\times 3b\cos 60°$，则 $b^2-3b+2=0$，解得 $b=1$ 或 2. 故△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 3\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 或 $S=\frac{1}{2}\times 3\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

4. B 【解析】∵ $\sqrt{2}\cos 2\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，∴ $\sqrt{2}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$，∴ $(\cos\alpha+\sin\alpha)\left(\cos\alpha-\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)=0$，又 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，∴ $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$，即 $\cos\alpha+\sin\alpha>0$，∴ $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{2}$，∵ $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，∴ $2\alpha\in(0,\pi)$，则 $\sin 2\alpha>0$. 由 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 两边平方可得 $1-\sin 2\alpha=\frac{1}{4}$，即 $\sin 2\alpha=\frac{3}{4}$，符合题意. 故选 B.

5. A 【解析】当 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin\alpha=\sin\beta=1$，$\sin\alpha+\sin\beta=2$，$\sin(\alpha+\beta)=0<\frac{1}{3}$，所以由 $\sin(\alpha+\beta)<\frac{1}{3}$ 不能推出 $\sin\alpha+\sin\beta<\frac{1}{3}$；$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta<\sin\alpha+\sin\beta$，则由 $\sin\alpha+\sin\beta<\frac{1}{3}$ 能推出 $\sin(\alpha+\beta)<\frac{1}{3}$，所以是充分不必要条件，故选 A.

6. B 【解析】$b\sin\frac{A+B}{2}=c\sin B$，即 $b\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=c\sin B$，即 $\sin B\cos\frac{C}{2}=\sin C\sin B=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\sin B$，又 $B\in(0,\pi)$，$\frac{C}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin B\neq 0$，$\cos\frac{C}{2}\neq 0$，故 $\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$，因为 $\frac{C}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}$，即 $C=\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

7. D 【解析】由已知得 A 为锐角，B 为钝角. 过点 C 作边 AB 延长线的垂线，垂足为 H，如图所示，因为 $b\cos A=3$，所以 $b\cos A=AH=3$，则 $BH=1$. 设 $CH=h$，则 $\tan\angle ACH=\frac{3}{h}$，$\tan\angle BCH=\frac{1}{h}$，所以 $\tan\angle ACB=\tan(\angle ACH-\angle BCH)=\frac{\frac{3}{h}-\frac{1}{h}}{1+\frac{3}{h}\times\frac{1}{h}}=\frac{2}{h+\frac{3}{h}}\leqslant\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $h=\sqrt{3}$ 时等号成立. 所以当 $h=\sqrt{3}$ 时，$\tan C$ 取得最大值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 D.



8. A 【解析】将函数 $f(x)=\cos x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，再将所得图象上所有点的纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}(\omega>0)$，得到 $g(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，令 $g(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)=0$，得 $\omega x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $x=\frac{1}{\omega}\left(k\pi+\frac{2\pi}{3}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$. 若函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 上没有零点，则需 $\frac{T}{2}>\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\pi$，所以 $\frac{2\pi}{\omega}>2\pi$，所以 $0<\omega<1$. 若函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 上有零点，则 $\frac{\pi}{2}<\frac{1}{\omega}\left(k\pi+\frac{2\pi}{3}\right)<\frac{3\pi}{2}$，当 $k=0$ 时，得 $\frac{1}{2}<\frac{2}{3\omega}<\frac{3}{2}$，解得 $\frac{4}{9}<\omega<\frac{4}{3}$，当 $k=1$ 时，得 $\frac{1}{2}<\frac{5}{3\omega}<\frac{3}{2}$，解得 $\frac{10}{9}<\omega<\frac{10}{3}$，所以当 $\frac{4}{9}<\omega<\frac{4}{3}$ 或 $\frac{10}{9}<\omega<\frac{10}{3}$ 时，函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 上有零点. 综上，若函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 上没有零点，则 $0<\omega\leqslant\frac{4}{9}$. 所以 ω 的取值范围是 $\left(0,\frac{4}{9}\right]$. 故选 A.

9. BD 【解析】小球运动的最高点与最低点的距离为 $2-(-2)=4$(cm)，故选项 A 错误；因为 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$，所以小球经过 4 s 往复运动一次，故选项 B 正确；当 $t\in(3,5)$ 时，$\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{7\pi}{4},\frac{11\pi}{4}\right)$，所以是自下往上到最高点，再往下运动，故选项 C 错误；当 $t=6.5$ 时，$h=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\times 6.5+\frac{\pi}{4}\right)=-2$，故选项 D 正确. 故选 BD.

10. AC 【解析】由 $f(0)=2\sin\varphi=1$，得 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，故 A 正确. $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，由

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=-2$，得 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=-1$，所以$\frac{2\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=-1+3k,k\in\mathbf{Z}$. 因为 $0<\omega<3$，所以 $\omega=2$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，所以 $f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$上不单调，故 B 错误. $f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2x$ 是偶函数，故 C 正确. 因为 $f'(x)=4\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $f(x)+f'(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+4\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{5}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}+\theta\right)\leqslant 2\sqrt{5}$，其中 $\tan\theta=2$，当且仅当 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}+\theta\right)=1$ 时，等号成立，故 D 错误. 故选 AC.

11. BC 【解析】取 $n=1$，则 $f(x)=\sin x+\cos x$，从而 $f(0)=1\neq0$，此时 $f(x)$不是奇函数，故 A 错误；因为 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos^n x+\sin^n x=f(x)$，所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$对称，故 B 正确；当 $n=3$ 时，$f'(x)=3\sin^2x\cos x-3\cos^2x\sin x=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$时，$f'(x)\leqslant0$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$时，$f'(x)\geqslant0$，所以 $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，所以 $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最小值为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 C 正确；当 $n=4$ 时，$f(x)=\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=1-\frac{1}{2}\sin^22x=1-\frac{1-\cos 4x}{4}=\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{3}{4}$，则 $f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\frac{k\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$，故 D 错误. 故选 BC.

12. -7 【解析】由$\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\cos(\pi+\alpha)$，得$\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=-\cos\alpha$，即 $\cos\alpha-\sin\alpha=-\cos\alpha$，所以 $\sin\alpha=2\cos\alpha$，即 $\tan\alpha=2$，所以 $\tan 2\alpha=\frac{2\times2}{1-2^2}=-\frac{4}{3}$，得 $\tan\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)=\frac{1-\left(-\frac{4}{3}\right)}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)}=-7$.

13. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】因为$\frac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{1-\cos 2\beta}{\sin 2\beta}$，所以$\frac{1+2\cos^2\alpha-1}{2\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1-(1-2\sin^2\beta)}{2\sin\beta\cos\beta}$，所以$\frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin^2\beta}{\sin\beta\cos\beta}$，因为 α,β 为锐角，所以 $\cos\alpha\neq0,\sin\beta\neq0$，则$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$，所以 $\cos\alpha\cos\beta=\sin\beta(1+\sin\alpha)$，即 $\cos\alpha\cos\beta=\sin\beta+\sin\beta\sin\alpha$，所以$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\sin\beta$，即 $\cos(\alpha+\beta)=\sin\beta$，因为 α,β 为锐角，所以有 $\alpha+\beta+\beta=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\left(\alpha+2\beta+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$ 【解析】由于 $A=\frac{3\pi}{4}$，所以 $0<B<\frac{\pi}{4}$，由正弦定理得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{3\pi}{4}}=2$，所以 $b=2\sin B$，$c=2\sin C$，所以 $\lambda b+c=2\lambda\sin B+2\sin C=2\lambda\sin B+2\sin\left(\frac{\pi}{4}-B\right)=2\lambda\sin B+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos B-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin B\right)=(2\lambda-\sqrt{2})\sin B+\sqrt{2}\cos B$. 当 $2\lambda-\sqrt{2}=0$，即 $\lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$\lambda b+c=\sqrt{2}\cos B$，没有最大值，所以 $\lambda\neq\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\lambda b+c=\sqrt{(2\lambda-\sqrt{2})^2+2}\cdot\sin(B+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2\lambda-\sqrt{2}}$，要使 $\lambda b+c$ 有最大值，则 $B+\varphi$ 要能取到$\frac{\pi}{2}$，由于 $0<B<\frac{\pi}{4}$，所以$\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\tan\varphi>1$，即$\frac{\sqrt{2}}{2\lambda-\sqrt{2}}>1$，解得$\frac{\sqrt{2}}{2}<\lambda<\sqrt{2}$，所以 λ 的取值范围是$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$.

训练 7　滚动练习

1. B 【解析】由 $x^2-4x+3\geqslant0$ 得$(x-1)(x-3)\geqslant0$，解得 $x\leqslant1$ 或 $x\geqslant3$，所以集合 $M=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$，由 $\log_2x\leqslant1$ 得 $\log_2x\leqslant\log_22$，解得 $0<x\leqslant2$，所以集合 $N=(0,2]$，所以 $M\cap N=(0,1]$. 故选 B.

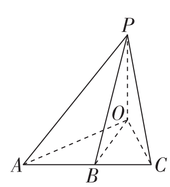
2. C 【解析】当 $a>1$ 时，$0<\frac{1}{a}<1$，当$\frac{1}{a}<1$ 时，$a<0$ 或 $a>1$，故“$a>1$”是“$\frac{1}{a}<1$”的充分不必要条件，故 A 中结论正确；命题“对任意 $x<1$，都有 $x^2<1$”为全称量词命题，其否定为存在量词命题，即“存在 $x<1$，使得 $x^2\geqslant1$”，故 B 中结论正确；当 $x\geqslant2$ 且 $y\geqslant2$ 时，一定有 $x^2+y^2\geqslant4$，当 $x^2+y^2\geqslant4$ 时，不妨取 $x=3,y=1$，此时不满足 $x\geqslant2$ 且 $y\geqslant2$，故“$x\geqslant2$ 且 $y\geqslant2$”是“$x^2+y^2\geqslant4$”的充分不必要条件，故 C 中结论错误；当 $a\neq0,b=0$ 时，$ab=0$，当 $ab\neq0$ 时，$a\neq0$ 且 $b\neq0$，故“$a\neq0$”是“$ab\neq0$”的必要不充分条件，故 D 中结论正确. 故选 C.

3. D 【解析】$\because\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{3}{5},\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4}{5}$，$\therefore\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{4}{5}$. 故选 D.

4. A 【解析】由 $y=x^2+ax+b$，得 $y'=2x+a$，由题意得 $y'|_{x=0}=a=1$，且 $0-b+1=0$，即 $b=1$，$\therefore a+b=2$. 故选 A.

5. C 【解析】由题可得 $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=A\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\omega+\varphi\right)$. 由图象可知 $g(x)_{\max}=4$，即 $A=4$. $\because g(x)$的最小正周期 $T=4\times\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)=\pi$，$\therefore\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，$\therefore g\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=4$，$\therefore\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 又$-\pi<\varphi<0$，$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{3}$，$\therefore f(x)=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，$\therefore f(0)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+4\cos\frac{\pi}{3}=4$.

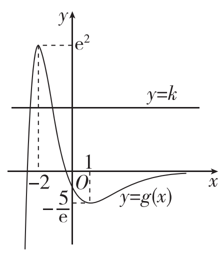
6. D 【解析】如图，设点 P 在地面上的射影为 O，则 $\angle PAO=30^\circ$，$\angle PBO=45^\circ$，$\angle PCO=60^\circ$. 设山高 $PO=h$，则 $AO=\sqrt{3}h$，$BO=h$，$CO=\frac{\sqrt{3}h}{3}$. 在 $\triangle AOC$ 中，



$\cos\angle ABO=-\cos\angle CBO$，由余弦定理得 $\frac{a^2+h^2-3h^2}{2ah}=-\frac{b^2+h^2-\frac{h^2}{3}}{2bh}$，整理得 $h^2=\frac{3ab(a+b)}{2(3b-a)}$，所以 $h=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6ab(a+b)}{3b-a}}$.

7. B 【解析】$f(x)=\frac{x^3e^x}{e^{2x}-1}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，定义域关于原点对称，因为 $f(-x)=\frac{-x^3e^{-x}}{e^{-2x}-1}=\frac{x^3e^x}{e^{2x}-1}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，排除 C，D；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，排除 A. 故选 B.

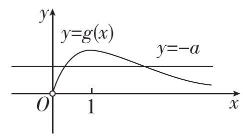
8. C 【解析】由题意知方程 $x^2+3x+1+ke^x=0$ 有两个不同的解，即 $\frac{-x^2-3x-1}{e^x}=k$ 有两个不同的实根，即 $y=\frac{-x^2-3x-1}{e^x}$ 的图象与直线 $y=k$ 有两个不同的交点. 记 $g(x)=\frac{-x^2-3x-1}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{x^2+x-2}{e^x}=\frac{(x+2)(x-1)}{e^x}$. 当 $x<-2$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $-2<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增. 所以当 $x=-2$ 时，函数 $g(x)$ 有极大值 e^2，当 $x=1$ 时，函数 $g(x)$ 有极小值 $-\frac{5}{e}$. 当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)<0$，且 $g(x)\to0$. 作出直线 $y=k$ 和 $g(x)$ 的大致图象，如图所示，由图可知 k 的取值范围为 $\left\{-\frac{5}{e}\right\}\cup[0,e^2)$.



9. ACD 【解析】对于 A，当 $x>0$ 时，$x+\frac{1}{x}\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，故 A 正确；对于 B，$\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\geqslant2\sqrt{\sqrt{x^2+4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}}=2$，因为 $\sqrt{x^2+4}\geqslant2$，所以等号不成立，所以 $\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值不为 2，故 B 错误；对于 C，$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}=\sqrt{x^2+2}\geqslant\sqrt{2}$，当 $x=0$ 时，等号成立，故 C 正确；对于 D，$2-3x-\frac{4}{x}=2-\left(3x+\frac{4}{x}\right)\leqslant2-2\sqrt{3x\cdot\frac{4}{x}}=2-4\sqrt{3}$，当且仅当 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立，故 D 正确. 故选 ACD.

10. AD 【解析】令 $f(x)=\frac{x}{\ln x}$，$x\in(1,+\infty)$，则 $f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，所以当 $x>e$ 时，$f'(x)>0$，当 $1<x<e$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递减，在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(e)=\frac{e}{\ln e}=e$，所以 $a>b$，$c>b$. 又 $\frac{2}{\ln2}-\frac{3}{\ln3}=\frac{2\ln3-3\ln2}{\ln2\cdot\ln3}=\frac{\ln3^2-\ln2^3}{\ln2\cdot\ln3}=\frac{\ln9-\ln8}{\ln2\cdot\ln3}>0$，所以 $a>c$，所以 $a>c>b$. 故选 AD.

11. BD 【解析】若 $f(x)$ 有两个“友情点对”，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的图象关于原点对称后与 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图象有两个交点. 因为当 $x<0$ 时，$f(x)=ax^2$，其图象关于原点对称后的图象对应的解析式为 $y=-ax^2(x>0)$. 所以 $y=\frac{x^3}{e^x}$ 的图象与 $y=-ax^2$ 的图象在 $(0,+\infty)$ 上有两个交点，即方程 $\frac{x^3}{e^x}=-ax^2$ 有两个正根，化简得 $-a=\frac{x}{e^x}$，设 $g(x)=\frac{x}{e^x}$，$x\in(0,+\infty)$，则直线 $y=-a$ 与 $g(x)=\frac{x}{e^x}$ 的图象在 $(0,+\infty)$ 上有两个交点. $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，令 $g'(x)>0$，解得 $x<1$，即当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)$ 单调递增；令 $g'(x)<0$，解得 $x>1$，即当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)$ 单调递减. 所以 $x=1$ 为 $g(x)$ 的极大值点，所以 $g(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$. 当 $x\to0$ 时，$g(x)\to0$；当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to0$. 作出直线 $y=-a$ 和 $g(x)$ 的大致图象如图所示.

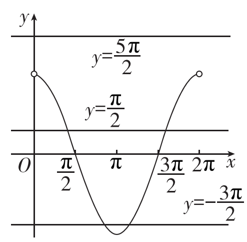


若直线 $y=-a$ 与 $g(x)$ 的图象在 $(0,+\infty)$ 上有两个交点，则 $-a\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，即 a 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{e},0\right)$. 故选 BD.

12. $3\sqrt{3}$ 【解析】$\because f(x)=f'\left(\frac{\pi}{9}\right)\sin3x+\cos3x$，$\therefore f'(x)=f'\left(\frac{\pi}{9}\right)\cdot3\cos3x-3\sin3x$，令 $x=\frac{\pi}{9}$，可得 $f'\left(\frac{\pi}{9}\right)=f'\left(\frac{\pi}{9}\right)3\cos\frac{\pi}{3}-3\sin\frac{\pi}{3}=f'\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\frac{3}{2}-3\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $f'\left(\frac{\pi}{9}\right)=3\sqrt{3}$.

13. $35\sqrt{5}$ 【解析】在 $\triangle BCD$ 中，$CD=35$，$\angle BDC=15^\circ$，$\angle BCD=\angle ACB+\angle DCA=120^\circ+15^\circ=135^\circ$，$\therefore\angle CBD=30^\circ$，由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin135^\circ}=\frac{35}{\sin30^\circ}$，解得 $BD=35\sqrt{2}$. 在 $\triangle ACD$ 中，$CD=35$，$\angle DCA=15^\circ$，$\angle ADC=\angle ADB+\angle BDC=135^\circ+15^\circ=150^\circ$，$\therefore\angle CAD=15^\circ$，$\therefore AD=CD=35$. 在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB=35^2+(35\sqrt{2})^2-2\times35\times35\sqrt{2}\times\cos135^\circ=35^2\times5$，$\therefore AB=35\sqrt{5}$，即 A，B 两点间的距离为 $35\sqrt{5}$ m.

14. $\cos x$　$\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$ 【解析】由题意得 $g(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$. 因为 $h(x)=f[g(x)]-1$ 在 $(0,2\pi)$ 上恰有 4 个不同的零点，所以 $f(\cos x)-1=0$，即 $\sin(\omega\cos x)=1$ 在 $(0,2\pi)$ 上恰有 4 个不同的实根，则 $\omega\cos x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 在 $(0,2\pi)$ 上恰有 4 个不同的实根，作出 $y=\omega\cos x$ 的图象，如图所示. 由图可知，当 $k=0$ 时，$\omega\cos x=\frac{\pi}{2}$ 有 2 个不同的实根，当 $k=-1$ 时，$\omega\cos x=-\frac{3\pi}{2}$ 也有 2 个不同的实根，当 $k=1$ 时，$\omega\cos x=\frac{5\pi}{2}$ 没有实根，故 $\begin{cases}-\omega<-\frac{3\pi}{2},\\ \frac{\pi}{2}<\omega\leqslant\frac{5\pi}{2},\end{cases}$ 即 $\frac{3\pi}{2}<\omega\leqslant\frac{5\pi}{2}$，故 ω 的取值范围是 $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$.



训练 8　平面向量、复数

1. C 【解析】$z=\frac{5i}{i-2}=\frac{5i(i+2)}{(i-2)(i+2)}=\frac{-5+10i}{-5}=1-2i$，故 $\overline{z}=1+2i$. 故选 C.

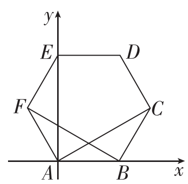
2. A 【解析】因为 $z(1-i)=(1-3i)^2$，所以 $z=\frac{(1-3i)^2}{1-i}=\frac{(-8-6i)(1+i)}{2}=-1-7i$，故 $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-7)^2}=5\sqrt{2}$，故选 A.

3. D 【解析】因为 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$,所以 $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$,所以 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,又 P,C,D 三点共线,所以 $m+\frac{1}{2}=1$,得 $m=\frac{1}{2}$.故选 D.

4. B 【解析】当 $x=-\frac{7}{3}$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向共线,且 $-\frac{7}{3}<-2$,所以“$x<2$”不能推出“$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角”.当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2x+2-6=2x-4<0$,且 $\frac{x+1}{2}\neq\frac{2}{-3}$,解得 $x<2$ 且 $x\neq-\frac{7}{3}$.所以“$x<2$”是“$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角”的必要不充分条件.故选 B.

5. C 【解析】因为 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$,所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向.对于 A,$\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反,A 选项错误;对于 B,$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$,得出 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,不能得出 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向的关系,B 选项错误;对于 C,$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同,故 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 成立,C 选项正确;对于 D,$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,不能得出 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向的关系,D 选项错误.故选 C.

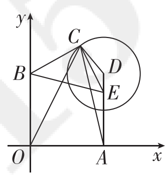
6. B 【解析】在正六边形 $ABCDEF$ 中,每个内角都是 $120°$,连接 AE,则 $\angle FEA=\angle FAE=30°$,故 $EA\perp AB$,以 A 为原点,AB 所在直线为 x 轴,AE 所在直线为 y 轴,建立平面直角坐标系,如图所示,



则 $A(0,0)$,$B(2,0)$.因为 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{BC}|=2$,$\cos 120°=-\frac{1}{2}$,$\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $F(-1,\sqrt{3})$,$C(3,\sqrt{3})$,所以 $\overrightarrow{AC}=(3,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{BF}=(-3,\sqrt{3})$,则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BF}=3\times(-3)+\sqrt{3}\times\sqrt{3}=-9+3=-6$.故选 B.

7. D 【解析】 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{OP}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OP}\rangle$,由题图②知,$|\overrightarrow{OP}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OP}\rangle$ 的最大值是 2,最小值是 -2,所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}$ 的最大值是 $2\times2=4$,最小值是 $2\times(-2)=-4$,所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}$ 的取值范围为 $[-4,4]$,故选 D.

8. B 【解析】设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}=(4,0)$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}=(0,4)$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,4)$,因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=2$,所以点 C 在以 $D(4,4)$ 为圆心,2 为半径的圆上.如图,取 $E(4,3)$,连接 BC,AC,CD,AD,CE,BE,则 $|\overrightarrow{CD}|=2|\overrightarrow{DE}|=2$,$|\overrightarrow{AD}|=2|\overrightarrow{CD}|=4$,又 $\angle CDE=\angle ADC$,所以 $\triangle DAC\backsim\triangle DCE$,所以 $|\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{CE}|$,又因为 $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=|\overrightarrow{CB}|$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=|\overrightarrow{CA}|$,所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|+2|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=|\overrightarrow{CA}|+2|\overrightarrow{CB}|=2|\overrightarrow{CE}|+2|\overrightarrow{CB}|\geqslant2|\overrightarrow{BE}|=2\sqrt{17}$.故选 B.



9. BC 【解析】对于 A,$e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$,故 A 错误;对于 B,$e^{\frac{\pi i}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$,所以 $e^{\frac{\pi i}{2}}$ 为纯虚数,故 B 正确;对于 C,$\left|\frac{e^{xi}}{\sqrt{3}+i}\right|=\frac{|e^{xi}|}{|\sqrt{3}+i|}=\frac{|\cos x+i\sin x|}{|\sqrt{3}+i|}=\frac{\sqrt{\cos^2x+\sin^2x}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{1}{2}$,故 C 正确;对于 D,$e^{2i}=\cos2+i\sin2$,则复数 e^{2i} 在复平面内对应的点为 $(\cos2,\sin2)$,因为 $\frac{\pi}{2}<2<\pi$,所以 $\cos2<0$,$\sin2>0$,所以点 $(\cos2,\sin2)$ 位于第二象限,即复数 e^{2i} 在复平面内对应的点位于第二象限,故 D 错误.故选 BC.

10. ABD 【解析】若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$,则 $-2m-1=0$,$\therefore m=-\frac{1}{2}$,A 正确;若 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$,则 $2-2n=0$,$\therefore n=1$,B 正确;若 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为锐角,则 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=2-2n>0$,即 $n<1$,但当 $n=-4$ 时,$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 同向,满足 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=2-2n>0$,但 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 $0°$,不是锐角,故 C 错误;$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=\sqrt{|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|^2}=\sqrt{4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^2}=\sqrt{4(m^2+1)-4(m-2)+5}=\sqrt{4\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+16}$,当 $m=\frac{1}{2}$ 时,$\sqrt{4\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+16}$ 取得最小值 4,故 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|$ 的最小值为 4,D 正确.故选 ABD.

11. BD 【解析】由已知得,$\overrightarrow{AB}=(2,-2)$,$\overrightarrow{OA}=(1,3)$,$\overrightarrow{OB}=(3,1)$,$\overrightarrow{BA}=(-2,2)$.对于 A,由 $\frac{\lambda}{\mu}=2$,得 $\lambda=2\mu(\mu\neq0)$,所以 $\overrightarrow{OP}=2\mu\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}=(5\mu,7\mu)$,所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=(5\mu,7\mu)\cdot(2,-2)=10\mu-14\mu=-4\mu\neq0$,$\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 不垂直,故 A 不正确;对于 B,当 $\lambda+\mu=1$ 时,由 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$,得 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$,即 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=\lambda(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$,即 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BA}$,所以 A,B,P 三点共线,因此点 P 在直线 AB 上,故 B 正确;对于 C,若 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OB}$,则 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,即 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$,这显然不成立,故 C 不正确;对于 D,当 $\lambda-\mu=1$ 时,$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+(\lambda-1)\overrightarrow{OB}=\lambda(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{OB}=(4\lambda-3,4\lambda-1)$,则 $\overrightarrow{OP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量的模为 $\left||\overrightarrow{OP}|\times\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{AB}|}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right|=\left|\frac{8\lambda-6-8\lambda+2}{2\sqrt{2}}\right|=\sqrt{2}$,故 D 正确.故选 BD.

12. 2 【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(2,0)$,所以 $|\boldsymbol{a}|=2$,所以 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos60°+4|\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{2^2-4\times2\times1\times\frac{1}{2}+4\times1^2}=2$.

13. $[4,6]$ 【解析】$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cdot(|\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAB)$,$|\overrightarrow{AB}|=2$,结合图形知,当过点 P 的直线与半圆弧 BC 相切于点 P 且平行于 BC 时,$|\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAB$ 取得最大值 3,此时 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cdot(|\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAB)=2\times3=6$;当点 P 与点 C 或点 B 重合时,$|\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAB$ 取得最小值 2,此时 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cdot(|\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAB)=2\times2=4$.故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的取值范围为 $[4,6]$.

14. $\frac{1}{8}$ 【解析】设 $\overrightarrow{BM}=\gamma\overrightarrow{BC}(0\leqslant\gamma\leqslant1)$,则 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1-\gamma}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{2}\overrightarrow{AC}$,所以 $\begin{cases}\lambda=\frac{1-\gamma}{2},\\ \mu=\frac{\gamma}{2},\end{cases}$ 则 $\lambda+\mu=\frac{1}{2}$,即 $\lambda=\frac{1}{2}-\mu$,由 $0\leqslant\gamma\leqslant1$,可得 $0\leqslant\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{2}$,则 $\mu\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$,所以 $\lambda^2+\mu^2=\left(\frac{1}{2}-\mu\right)^2+\mu^2=2\mu^2-\mu+\frac{1}{4}=2\left(\mu-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$,故当 $\mu=\frac{1}{4}$ 时,$\lambda^2+\mu^2$ 取得最小值 $\frac{1}{8}$.

训练 9 滚动练习

1. A 【解析】$A\cap B=\{-2,-1,0,1,2\}\cap\{x|0\leqslant x\leqslant2\}=\{0,1,2\}$,故选 A.

2. A 【解析】因为 $z=\frac{i}{1+2i}=\frac{i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{2+i}{5}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$,所以 $\bar{z}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$.故选 A.

3. C 【解析】因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$f(-x)=-\sin x\cdot\ln x^2=-f(x)$,所以 $f(x)$ 是奇函数,排除 B,D;当 $x=\pi$ 时,$f(\pi)=\sin\pi\cdot\ln\pi^2=0$,排除 A.故选 C.

4. B 【解析】由 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{a}=-(2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c})$,所以 $\boldsymbol{a}^2=$

$4\boldsymbol{b}^2+12\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+9\boldsymbol{c}^2$，因为$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{19}$，$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，所以 $19=4+12\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+9$，所以 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}$. 故选 B.

5. A **【解析】** 由 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$，得 $a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+a^2-2ac+c^2=0$，即 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$，所以 $a=b=c$，所以“$a=b$”是“$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$”的必要不充分条件. 故选 A.

6. C **【解析】** 对于 A，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$\lg\left(x^2+\frac{1}{4}\right)=\lg x$，故不等式不一定成立，故 A 错误；对于 B，当 $\sin x=-1$，即 $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\sin x+\frac{1}{\sin x}=-2$，故不等式不一定成立，故 B 错误；对于 C，因为 $x^2+1-2|x|=(|x|-1)^2\geqslant0$，所以 $x^2+1\geqslant2|x|$ 一定成立，故 C 正确；对于 D，当 $x=1$ 时，$\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2}$，故不等式不一定成立，故 D 错误. 故选 C.

7. D **【解析】** 因为 $\tan(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ 是方程 $x^2+4x-3=0$ 的两个实数根，所以 $\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)=-4$，$\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)=-3$，所以 $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\beta}=\frac{\sin[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]}{\cos[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}=\frac{-4}{1+(-3)}=2$. 故选 D.

8. C **【解析】** 因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，所以 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\right]$，因为函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上恰有三个零点，所以 $3\pi\leqslant\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}<4\pi$，解得 $\frac{17}{2}\leqslant\omega<\frac{23}{2}$. 故选 C.

9. BC **【解析】** 当点 D 在线段 BC 上时，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$，所以 $\frac{m}{n}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$. 当点 D 在线段 BC 的延长线上时，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$，所以 $\frac{m}{n}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}$. 故选 BC.

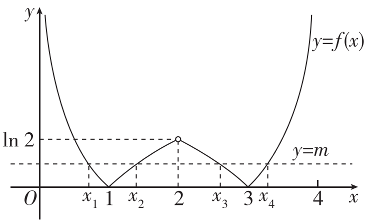
10. ABC **【解析】** 由题图可知，$A=2$，$\frac{T}{4}=\pi$，所以 $T=4\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，解得 $\omega=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+4\varphi\right)$. 因为 $f(x)$ 的图象过点 $(0,1)$，所以 $1=2\sin 4\varphi$，即 $\sin 4\varphi=\frac{1}{2}$，因为 $0<4\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $4\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$，故 A 正确；将函数 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{4}$，纵坐标不变，所得到的图象对应的解析式为 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，再将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，所得到的图象对应的解析式为 $g(x)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，故 B 正确；当 $x\in\left[\pi,\frac{4\pi}{3}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{11\pi}{6},\frac{5\pi}{2}\right]$，所以 $g(x)$ 在区间 $\left[\pi,\frac{4\pi}{3}\right]$ 上单调递增，故 C 正确；因为 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin 0=0$，所以直线 $x=-\frac{\pi}{3}$ 不是函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴，故 D 不正确. 故选 ABC.

11. BC **【解析】** 因为 $y>1$，所以 $\ln y>0$，由 $\frac{e^{2x}}{(\ln y)^2}>\left(\frac{x}{y}\right)^n$，得 $\frac{e^{2x}}{x^n}>\frac{(\ln y)^2}{y^n}$，构造函数 $f(x)=\frac{e^{2x}}{x^n}(x>1)$，$g(y)=\frac{(\ln y)^2}{y^n}(y>1)$，则 $f'(x)=\frac{(2x-n)e^{2x}}{x^{1+n}}$，$g'(y)=\frac{\ln y(2-n\ln y)}{y^{n+1}}$. 当 $n\leqslant2$，且 $n\in\mathbf{N}$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)>f(1)=e^2$；当 $n>2$，且 $n\in\mathbf{N}$ 时，若 $1<x<\frac{n}{2}$，则 $f'(x)<0$，若 $x>\frac{n}{2}$，则 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(1,\frac{n}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{n}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，所以当 $x=\frac{n}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $\frac{e^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}$. 当 $n=0$ 时，$g'(y)>0$，$g(y)$ 单调递增；当 $n\neq0$，且 $n\in\mathbf{N}$ 时，若 $1<y<e^{\frac{2}{n}}$，则 $g'(y)>0$，$g(y)$ 单调递增，若 $y>e^{\frac{2}{n}}$，则 $g'(y)<0$，$g(y)$ 单调递减，所以当 $y=e^{\frac{2}{n}}$ 时，$g(y)$ 取得最大值 $\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{\left(e^{\frac{2}{n}}\right)^n}=\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{e^2}$. 当 $n=0$ 时，不妨取 $x=2$，$y=e^{e^2}$，则 $\frac{e^{2x}}{(\ln y)^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^n$，故 A 错误；当 $n=2$ 时，$f(x)>e^2$，$g(y)_{\max}=\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{e^2}=\frac{1}{e^2}$，所以 $f(x)>g(y)$ 恒成立，满足题意，故 B 正确；当 $n>2$，且 $n\in\mathbf{N}$ 时，要使 $\frac{e^{2x}}{(\ln y)^2}>\left(\frac{x}{y}\right)^n$ 恒成立，只需 $f(x)_{\min}>g(y)_{\max}$，即 $\frac{e^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}>\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{e^2}$，即 $e^{n+2}>\left(\frac{2}{n}\right)^2\left(\frac{n}{2}\right)^n=\frac{n^{n-2}}{2^{n-2}}$，即 $n+2>(n-2)\ln n+(2-n)\ln 2$，当 $n=8$ 时，$8+2>6\ln 8-6\ln 2=12\ln 2$，故 C 正确；当 $n=12$ 时，$12+2<10\ln 12-10\ln 2=10\ln 6$，故 D 错误. 故选 BC.

12. $\frac{3}{5}$ **【解析】** 由题知 $(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=(1-3\lambda,3-4\lambda)\cdot(3,4)=15-25\lambda=0$，解得 $\lambda=\frac{3}{5}$.

13. $\frac{\sqrt{15}}{3}$ **【解析】** 记 $BC=a$，$AB=c$，$AC=b$，由题知 $c=2a$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=a^2\sin B=1$，所以 $a^2=\frac{1}{\sin B}$，由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=5a^2-4a^2\cos B=\frac{5-4\cos B}{\sin B}$. 令 $y=\frac{5-4\cos B}{\sin B}$，$B\in(0,\pi)$，则 $y'=\frac{4\sin^2B-5\cos B+4\cos^2B}{\sin^2B}=\frac{4-5\cos B}{\sin^2B}$，设 $\cos\theta=\frac{4}{5}$，$\theta\in(0,\pi)$，当 $B\in(\theta,\pi)$ 时，$y'>0$，所以 $y=\frac{5-4\cos B}{\sin B}$ 在 (θ,π) 上单调递增，当 $B\in(0,\theta)$ 时，$y'<0$，所以 $y=\frac{5-4\cos B}{\sin B}$ 在 $(0,\theta)$ 上单调递减，所以当 $B=\theta$，即 $\cos B=\frac{4}{5}$，$\sin B=\frac{3}{5}$ 时，$y=\frac{5-4\cos B}{\sin B}$ 取得最小值，此时 AC 取得最小值，$a^2=\frac{1}{\sin B}=\frac{5}{3}$，所以 $a=\frac{\sqrt{15}}{3}$，即 BC 的长为 $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

14. 8　$\left(22,\frac{45}{2}\right)$　【解析】当 $2<x<4$ 时，$0<4-x<2$，则 $f(x)=f(4-x)=|\ln(4-x)|$，所以 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|,0<x<2,\\ |\ln(4-x)|,2<x<4,\end{cases}$ 根据对数函数的图象以及函数图象的翻折变换，可得 $f(x)$ 的图象如图所示.



易知函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，所以 $\frac{x_1+x_4}{2}=2$，$\frac{x_2+x_3}{2}=2$，所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=8$. 由图可知 $0<m<\ln 2$，$x_1\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，且 $\ln x_1=-m$，$\ln x_2=m$，所以 $\ln x_1=-\ln x_2$，所以 $x_2=\frac{1}{x_1}$，由 $\frac{x_1+x_4}{2}=2$，$\frac{x_2+x_3}{2}=2$，得 $x_4=4-x_1$，$x_3=4-x_2=4-\frac{1}{x_1}$，所以 $(x_1+x_2)^2+x_3^2+x_4^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=x_1^2+2x_1\cdot\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1^2}+(4-x_1)^2+\left(4-\frac{1}{x_1}\right)^2=x_1^2+2+\frac{1}{x_1^2}+16-8x_1+x_1^2+16-\frac{8}{x_1}+\frac{1}{x_1^2}=2x_1^2+\frac{2}{x_1^2}-8x_1-\frac{8}{x_1}+34=2\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2-8\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)+30$，令 $t=x_1+\frac{1}{x_1}\left(\frac{1}{2}<x_1<1\right)$，易知函数 $t=x_1+\frac{1}{x_1}$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，所以 $t\in\left(2,\frac{5}{2}\right)$，所以 $(x_1+x_2)^2+x_3^2+x_4^2=2t^2-8t+30=2(t-2)^2+22$，因为 $2<t<\frac{5}{2}$，所以 $0<t-2<\frac{1}{2}$，所以 $0<(t-2)^2<\frac{1}{4}$，所以 $22<2(t-2)^2+22<\frac{45}{2}$，所以 $(x_1+x_2)^2+x_3^2+x_4^2$ 的取值范围为 $\left(22,\frac{45}{2}\right)$.

训练 10　数列

1. B　【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$\because a_8=6$，$a_{11}=0$，$\therefore a_1+7d=6$，$a_1+10d=0$，可得 $a_1=20$. 故选 B.

2. A　【解析】$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_1+a_7+a_{13}=4\pi$，$\therefore a_1+a_7+a_{13}=3a_7=4\pi$，解得 $a_7=\frac{4\pi}{3}$，$\therefore \tan(a_2+a_{12})=\tan 2a_7=\tan\frac{8\pi}{3}=\tan\left(3\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$，故选 A.

3. D　【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$\because S_n$ 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $\frac{S_3}{S_6}=\frac{1}{3}$，$\therefore d\neq 0$，$S_6=3S_3$，即 $6a_1+\frac{6\times 5}{2}d=3\left(3a_1+\frac{3\times 2}{2}d\right)$，整理可得 $a_1=2d$，$\therefore S_6=6a_1+\frac{6\times 5}{2}d=27d$，$S_{12}=12a_1+\frac{12\times 11}{2}d=90d$，$\therefore \frac{S_6}{S_{12}}=\frac{27d}{90d}=\frac{3}{10}$，故选 D.

4. B　【解析】记第 n 天派出 a_n 人，则数列 $\{a_n\}$ 是以 65 为首项，7 为公差的等差数列，所以 $a_n=65+7(n-1)=7n+58$. 令 $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=300$，则 $3(7n+65)=300$，解得 $n=5$，故目前一共派出了 7 天，共派出了 $7\times 65+\frac{7\times 6}{2}\times 7=602$（人），故选 B.

5. C　【解析】$\because 4a_5,a_3,2a_4$ 成等差数列，$\therefore 2a_3=4a_5+2a_4$，又各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1，$\therefore \{a_n\}$ 的公比 $q>0$，$a_1=1$，$\therefore 2q^2+q-1=0$，解得 $q=\frac{1}{2}$ 或 $q=-1$（舍去），$\therefore \{a_n\}$ 的前 6 项和为 $\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{1\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{63}{32}$，故选 C.

6. D　【解析】由题意知 $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n^2$，所以 $a_n>0$，$\log_2 a_{n+1}=1+2\log_2 a_n$，所以 $\log_2 a_{n+1}+1=2(\log_2 a_n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$，又 $\log_2 a_1+1=2$，所以 $\{\log_2 a_n+1\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列，则 $\log_2 a_n+1=2^n$，所以 $\log_2 a_n=2^n-1$，$a_n=2^{2^n-1}$，易知选项 A,B,C 错误，选项 D 正确. 故选 D.

7. B　【解析】由 $a_{n+1}=-1+\frac{2}{1-a_n}$，且 $a_1=3$，可得 $a_2=-1+\frac{2}{1-3}=-2$，$a_3=-1+\frac{2}{1-(-2)}=-\frac{1}{3}$，$a_4=-1+\frac{2}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{2}$，$a_5=-1+\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=3=a_1$，所以 $a_{n+4}=a_n$，所以 $a_{2023}=a_3=-\frac{1}{3}$，故选 B.

8. C　【解析】由题意得 $a_n=a_1q^{n-1}$，由 $a_{2019}a_{2020}>1$，得 $a_{2019}a_{2020}=a_{2019}^2q>1$，则 $q>0$. 由 $\frac{a_{2019}-1}{a_{2020}-1}<0$，得 $(a_{2019}-1)(a_{2020}-1)<0$，又 $a_1>1$，所以 $\begin{cases}0<a_{2020}<1,\\ a_{2019}>1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_{2020}>1,\\ 0<a_{2019}<1.\end{cases}$ 当 $\begin{cases}a_{2020}>1,\\ 0<a_{2019}<1\end{cases}$ 时，可得 $q>1$，由 $a_1>1$，得 $a_{2019}=a_1q^{2018}>1$，与 $0<a_{2019}<1$ 矛盾，所以 $\begin{cases}0<a_{2020}<1,\\ a_{2019}>1,\end{cases}$ 则 $0<q<1$. 对于 A，$S_{2020}-S_{2019}=a_{2020}>0$，故 $S_{2019}<S_{2020}$，故 A 错误；对于 B，等比数列 $\{a_n\}$ 中，$0<q<1$，$a_1>1$，所以数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，又因为 $a_{2020}<1<a_{2019}$，所以 T_{2019} 是数列 $\{T_n\}$ 中的最大项，故 B 错误；对于 C，等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{2019}a_{2021}=a_{2020}^2<1$，则 $a_{2019}a_{2021}-1<0$，故 C 正确；对于 D，由对 B 的分析知 T_{2019} 是数列 $\{T_n\}$ 中的最大项，故 D 错误. 故选 C.

9. AD　【解析】由题得 $a_1=1$，$a_1+a_2=2$，则 $a_2=1$，又 $a_2+a_3=4$，所以 $a_3=3$，又 $a_3+a_4=2^3$，所以 $a_4=5$，故 A 正确；$\frac{a_2}{a_1}=1\neq\frac{a_3}{a_2}=3$，故 $\{a_n\}$ 不是等比数列，故 B 错误；$a_1+a_2+\cdots+a_{2021}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2020}+a_{2021})=1+2^2+2^4+\cdots+2^{2020}=1+\frac{4\times(1-4^{1010})}{1-4}=\frac{4^{1011}-1}{3}=\frac{2^{2022}-1}{3}$，故 C 错误；$a_1+a_2+\cdots+a_{2022}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2021}+a_{2022})=2^1+2^3+\cdots+2^{2021}=\frac{2\times(1-4^{1011})}{1-4}=\frac{2\times 4^{1011}-2}{3}=\frac{2^{2023}-2}{3}$，故 D 正确. 故选 AD.

10. AC　【解析】对于 B 和 D，若 $\{a_n\}$ 为等比数列，则当 $\{a_n\}$ 的公比 $q=-1$，且 m 为正偶数时，$S_m=S_{2m}-S_m=S_{3m}-S_{2m}=0$，此时 $S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m}$ 不成等比数列，$\frac{S_m}{m}=\frac{S_{2m}}{2m}=\frac{S_{4m}}{4m}=0$，此时 $\frac{S_m}{m},\frac{S_{2m}}{2m},\frac{S_{4m}}{4m}$ 不成等比数列，则 B,D 错误；对于 A，若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，设公差为 d，则 $S_m=a_1+a_2+\cdots+a_m$，$S_{2m}-S_m=a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{2m}=(a_1+md)+(a_2+md)+\cdots+(a_m+md)=S_m+m^2d$，$S_{3m}-S_{2m}=a_{2m+1}+a_{2m+2}+\cdots+a_{3m}=(a_{m+1}+md)+(a_{m+2}+md)+\cdots+(a_{2m}+md)=(S_{2m}-S_m)+m^2d$，则 $S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m}$ 成等差数列，其公差为 m^2d，A 正确；对于 C，若 $\{a_n\}$ 为等差数列，设公差为 d，则 $\frac{S_m}{m}=\frac{ma_1+\frac{m(m-1)}{2}d}{m}=a_1+\frac{(m-1)}{2}d=\frac{d}{2}m+a_1-\frac{d}{2}$，$\frac{S_{2m}}{2m}=md+a_1-\frac{d}{2}$，$\frac{S_{3m}}{3m}=$

$\frac{3m}{2}d+a_1-\frac{d}{2}$,因为 $2\times\frac{S_{2m}}{2m}=\frac{S_m}{m}+\frac{S_{3m}}{3m}$,所以 $\frac{S_m}{m},\frac{S_{2m}}{2m},\frac{S_{3m}}{3m}$ 成等差数列,C 正确. 故选 AC.

11. ACD 【解析】对于 A,由题意得 $a_{13}=a_{11}\cdot m^2=3m^2$,$a_{51}=a_{11}+4m=3+4m$,又 $a_{13}=a_{51}+1$,所以 $3m^2=3+4m+1$,整理可得 $(3m+2)(m-2)=0$,由 $m>0$,解得 $m=2$,故 A 正确;对于 B,$a_{71}=a_{11}+6\times2=15$,则 $a_{78}=a_{71}\cdot2^7=15\times2^7\neq15\times2^8$,故 B 错误;对于 C,$a_{i1}=a_{11}+(i-1)\times2=1+2i$,则 $a_{ij}=a_{i1}\cdot2^{j-1}=(1+2i)\cdot2^{j-1}$,故 C 正确;对于 D,$S=a_{11}\frac{1-2^n}{1-2}+a_{21}\frac{1-2^n}{1-2}+a_{31}\frac{1-2^n}{1-2}+\cdots+a_{n1}\frac{1-2^n}{1-2}=\frac{1-2^n}{1-2}[3+5+7+\cdots+(1+2n)]=(2^n-1)\frac{n(3+1+2n)}{2}=n(2+n)(2^n-1)$,故 D 正确. 故选 ACD.

12. $\frac{2}{n(n+1)}$ 【解析】由题意可得 $S_n-(2n-1)S_{n-1}=n^2(S_n-S_{n-1})(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$,所以 $(n^2-1)S_n=(n-1)^2S_{n-1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$,又易知 $S_n\neq0(n\in\mathbf{N}^*)$,所以 $\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{(n-1)^2}{(n+1)(n-1)}=\frac{n-1}{n+1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$,所以 $S_n=S_1\times\frac{S_2}{S_1}\times\frac{S_3}{S_2}\times\cdots\times\frac{S_n}{S_{n-1}}=1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n+1}=\frac{(n-1)!}{\frac{(n+1)!}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$,又因为 $S_1=1$ 也满足上式,所以 $S_n=\frac{2}{n(n+1)}(n\in\mathbf{N}^*)$.

13. $\frac{10}{3}$ $2^{2023}-1$ 【解析】因为 $f(x)=x^2-5x+6$,所以 $f'(x)=2x-5$,所以 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^2-5x_n+6}{2x_n-5}=\frac{x_n^2-6}{2x_n-5}$,则 $x_{n+1}-2=\frac{x_n^2-6}{2x_n-5}-2=\frac{(x_n-2)^2}{2x_n-5}$,$x_{n+1}-3=\frac{x_n^2-6}{2x_n-5}-3=\frac{(x_n-3)^2}{2x_n-5}$,则有 $\frac{x_{n+1}-2}{x_{n+1}-3}=\frac{(x_n-2)^2}{(x_n-3)^2}$,则 $a_{n+1}=\log_2\frac{x_{n+1}-2}{x_{n+1}-3}=\log_2\frac{(x_n-2)^2}{(x_n-3)^2}=2\log_2\frac{x_n-2}{x_n-3}=2a_n$,所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项,2 为公比的等比数列,所以 $a_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$. 由 $a_2=\log_2\frac{x_2-2}{x_2-3}=2$,解得 $x_2=\frac{10}{3}$. 因为 $S_n=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$,所以 $S_{2023}=2^{2023}-1$.

14. 2 【解析】当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{2^n}$,所以 $2^na_n=2^{n-1}a_{n-1}+1$,又 $2^1a_1=3$,所以数列 $\{2^na_n\}$ 是首项为 3,公差为 1 的等差数列,故 $2^na_n=n+2$,从而 $a_n=\frac{n+2}{2^n}$. 当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,因为 $\frac{\lambda}{n}\geqslant a_n$ 恒成立,即 $\lambda\geqslant\frac{n(n+2)}{2^n}$ 恒成立,所以 $\lambda\geqslant\left[\frac{n(n+2)}{2^n}\right]_{\max}$. 由 $\begin{cases}\frac{n(n+2)}{2^n}\geqslant\frac{(n+1)(n+3)}{2^{n+1}},\\ \frac{n(n+2)}{2^n}\geqslant\frac{(n-1)(n+1)}{2^{n-1}}\end{cases}(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant2)$,得 $\begin{cases}n^2\geqslant3,\\1-\sqrt{3}\leqslant n\leqslant1+\sqrt{3},\\n\geqslant2\end{cases}(n\in\mathbf{N}^*)$,得 $n=2$,所以 $\left[\frac{n(n+2)}{2^n}\right]_{\max}=\frac{2\times(2+2)}{2^2}=2$,所以 $\lambda\geqslant2$,即实数 λ 的最小值是 2.

训练 11 滚动练习

1. B 【解析】因为复数 $z=1-\mathrm{i}$,所以 $\bar{z}=1+\mathrm{i}$,所以 $\left|\frac{1}{\bar{z}}\right|=\left|\frac{1}{1+\mathrm{i}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 B.

2. D 【解析】因为 $y=\sqrt{2x-x^2}$,所以 $2x-x^2\geqslant0$,即 $x(2-x)\geqslant0$,解得 $0\leqslant x\leqslant2$,故 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant2\}$,因为全集 $U=\mathbf{R}$,所以 $\complement_UA=\{x|x<0$ 或 $x>2\}$. 因为 $y=2^x$,所以 $y>0$,所以 $B=\{y|y>0\}$,故 $(\complement_UA)\cap B=\{x|x>2\}$,故选 D.

3. D 【解析】由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=49$,$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=4$,可得 $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=49-9-16=24$,所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=9+16-24=1$,所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$,故选 D.

4. C 【解析】由题可知,$f'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}(x>0)$,令 $f'(x)<0$,得 $0<x<2$,所以函数 $f(x)=x-2\ln x$ 的单调递减区间是 $(0,2)$. 故选 C.

5. B 【解析】$\because c=\frac{2}{3}=\log_3 3^{\frac{2}{3}}=\log_3\sqrt[3]{9}>\log_3\sqrt[3]{8}=\log_3 2=a$,$\therefore c>a$. 又 $c=\frac{2}{3}=\log_4 4^{\frac{2}{3}}=\log_4\sqrt[3]{16}<\log_4\sqrt[3]{27}=\log_4 3=\frac{\ln 3}{\ln 4}=b$,$\therefore c<b$,$\therefore a<c<b$. 故选 B.

6. D 【解析】由 $\sin\alpha=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$,可得 $\sin\alpha=-2\cos\alpha$,所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-2\cos\alpha}{\cos\alpha}=-2$,所以 $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\alpha}=\frac{1-(-2)}{1+1\times(-2)}=-3$. 故选 D.

7. B 【解析】由数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列,得 $a_2a_8=a_5^2$,由 $a_2a_5a_8=2^9$,得 $a_5^3=2^9$,得 $a_5=8$. 因为 $b_n=\log_2a_n$,所以 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_9=\log_2a_1+\log_2a_2+\log_2a_3+\cdots+\log_2a_9=\log_2(a_1a_2a_3\cdots a_9)=\log_2[(a_1a_9)\cdot(a_2a_8)(a_3a_7)(a_4a_6)a_5]=\log_2a_5^9=9\log_2a_5=9\log_28=9\times3=27$. 故选 B.

8. D 【解析】由等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列,可设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q,其中 $q\neq1$,由 a_1,a_2,a_3-1 成等差数列,得 $2a_2=a_1+a_3-1$,即 $2a_1q=a_1+a_1q^2-1$,整理得 $a_1=\frac{1}{(q-1)^2}$,易知 $a_1>0$,故 $\{a_n\}$ 为各项均为正数的等比数列,所以 $q>1$,$a_{11}=\frac{q^{10}}{(q-1)^2}$. 设 $f(q)=\frac{q^5}{q-1}(q>1)$,则 $f'(q)=\frac{5q^4(q-1)-q^5}{(q-1)^2}=\frac{q^4(4q-5)}{(q-1)^2}$. 当 $q\in\left(1,\frac{5}{4}\right)$ 时,$f'(q)<0$,$f(q)$ 单调递减;当 $q\in\left(\frac{5}{4},+\infty\right)$ 时,$f'(q)>0$,$f(q)$ 单调递增. 故当 $q=\frac{5}{4}$ 时,$f(q)$ 取得最小值,即 $a_{11}=[f(q)]^2$ 取得最小值,此时 $a_1=16$,$a_n=a_1q^{n-1}=16\times\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}$,所以 $a_2=20$,$a_3=25$,当 $n\geqslant4$,$n\in\mathbf{N}^*$ 时,$a_n\notin\mathbf{N}^*$,所以集合 $A=\{a_n|a_n\in\mathbf{N}^*\}$ 中的元素之和为 $16+20+25=61$. 故选 D.

9. ABC 【解析】由题图可知 $A=2$,设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T,则 $\frac{3}{4}T=\frac{7\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\pi}{4}$,可得 $T=\pi$,所以 A 正确;由 $T=\pi$,得 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,可得 $\omega=2$,所以 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$,由图可知 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=2\sin\left(2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)=-2$,可得 $2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即 $\varphi=-\frac{5\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,由 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}=2$,得直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 是

$f(x)$的图象的一条对称轴,所以 B 正确;$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$,所以 D 错误;$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left[\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,所以 C 正确.故选 ABC.

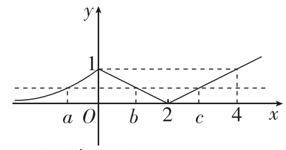
10. AD 【解析】由题意知 $f(x)=x-\sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$\because f'(x)=1-\cos x\geqslant 0$ 恒成立,$\therefore f(x)$为 $\mathbf{R}$ 上的增函数,故 A 正确;$\because f(-x)=-x+\sin x=-f(x)$,$\therefore f(x)$是奇函数,不是偶函数,故 B 错误;由 $f'(x)=0$,得 $x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,此时 $2k\pi-\sin 2k\pi=2k\pi\neq 1(k\in\mathbf{Z})$,$\therefore$ 斜率为 0 的切线为直线 $y=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,不可能为直线 $y=1$,故 C 错误;$\because f(x)$为 $\mathbf{R}$ 上的增函数,$f(0)=0$,$\therefore f(x)$有唯一的零点,故 D 正确.故选 AD.

11. BC 【解析】对于数列$\{a_n\}$,若 $a_n=1,a_{n+1}=1,a_{n+2}=1$,则数列$\{a_n\}$是等比数列,但$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}$无意义,数列$\{a_n\}$不是等差比数列,所以 A 错误;若等差比数列$\{a_n\}$的公差比为 0,即$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=0$,则 $a_{n+2}-a_{n+1}=0$,则$\frac{a_{n+3}-a_{n+2}}{a_{n+2}-a_{n+1}}$无意义,所以 B 正确;由 $a_n=-3^n+2$,得 $\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=\frac{-3^{n+2}+2-(-3^{n+1}+2)}{-3^{n+1}+2-(-3^n+2)}=\frac{-3^{n+2}+3^{n+1}}{-3^{n+1}+3^n}=3$,故数列$\{a_n\}$是等差比数列,所以 C 正确;设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则 $a_{n+2}-a_{n+1}=d,a_{n+1}-a_n=d$,当 $d=0$ 时,$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}$无意义,数列$\{a_n\}$不是等差比数列,所以 $d\neq 0$,则$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=\frac{d}{d}=1$,所以公差比不可能为 2,所以 D 错误.故选 BC.

12. $\frac{\sqrt{46}}{2}$ 【解析】由余弦定理可得,$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{36+16-25}{2\times 6\times 4}=\frac{9}{16}$.在$\triangle ABD$ 中,$AB=c=4$,$BD=\frac{1}{2}a=3$,由余弦定理可得 $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos B=16+9-2\times 4\times 3\times\frac{9}{16}=\frac{23}{2}$,所以 $AD=\frac{\sqrt{46}}{2}$.

13. $(1,5)$ 【解析】因为函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x-t)$的定义域是$(m,m+8)$,所以 $m,m+8$ 为关于 x 的方程$-x^2+2x-t=0$ 的两个根,所以 $\Delta=2^2-4t>0$,可得 $t<1$,且$\begin{cases}m+m+8=2,\\m\times(m+8)=t,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=-3,\\t=-15,\end{cases}$所以 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x+15)$.令 $h(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$,则 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,令 $g(x)=-x^2+2x+15=-(x-1)^2+16$,则 $g(x)$的图象为开口向下且对称轴为直线 $x=1$ 的抛物线,由 $g(x)>0$,得$-3<x<5$,所以当 $x\in(-3,1)$时,$g(x)$单调递增,当 $x\in(1,5)$时,$g(x)$单调递减.因为 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x+15)=h[g(x)]$,所以函数 $f(x)$的单调递增区间为$(1,5)$.

14. $(-\infty,4]$ $(-\infty,5-\ln 2]$ 【解析】由 $f(x)=\begin{cases}e^x,x\leqslant 0,\\\frac{1}{2}|x-2|,x>0,\end{cases}$得 $f(x)=\begin{cases}e^x,x\leqslant 0,\\1-\frac{1}{2}x,0<x\leqslant 2,\\\frac{1}{2}x-1,x>2.\end{cases}$因为 $f(x)\leqslant 1$,所以当 $x\leqslant 0$ 时,$e^x\leqslant 1$,该不等式恒成立,当 $0<x\leqslant 2$ 时,由 $1-\frac{1}{2}x\leqslant 1$,得 $0<x\leqslant 2$,当 $x>2$ 时,由$\frac{1}{2}x-1\leqslant 1$,得 $2<x\leqslant 4$,综上所述,不等式 $f(x)\leqslant 1$ 的解集为$(-\infty,4]$.作出函数 $f(x)$的图象,如图所示,当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)=e^x\in(0,1]$,又 $f(2)=0$,$f(0)=f(4)=1$,所以 $a<0<b<2<c<4$,且 $b+c=4$,所以 $a+2b+c=a+b+4$.设 $f(a)=f(b)=t\in(0,1)$,则 $a=\ln t$,$b=2-2t$,所以$a+2b+c=a+b+4=\ln t-2t+6$.设 $g(t)=\ln t-2t+6$,$t\in(0,1)$,则 $g'(t)=\frac{1}{t}-2$,令 $g'(t)=0$,解得 $t=\frac{1}{2}$,当 $t\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时,$g'(t)>0$,$g(t)$单调递增,当 $t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时,$g'(t)<0$,$g(t)$单调递减,所以 $g(t)\leqslant g\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}-1+6=5-\ln 2$,又当 $t\to 0^+$时,$g(t)\to-\infty$,故 $a+2b+c$ 的取值范围为$(-\infty,5-\ln 2]$.

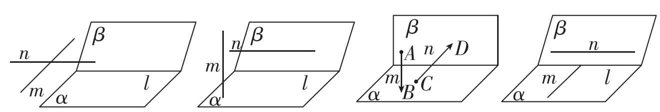


训练 12 立体几何与空间向量

1. C 【解析】由 P,A,B,C 四点共面,可得 $\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$ 共面,设 $\overrightarrow{PC}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}=(2x-y,x+2y,-3x+3y)=(\lambda,6,-9)$,则$\begin{cases}2x-y=\lambda,\\x+2y=6,\\-3x+3y=-9,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=4,\\y=1,\\\lambda=7.\end{cases}$故选 C.

2. C 【解析】对于 A,若 $\alpha\perp\beta$,$l\subset\beta$,$\alpha\cap\beta=m$,$l\perp m$,则根据面面垂直的性质定理可得 $l\perp\alpha$,A 中说法正确.对于 B,若 $l\perp\beta$,$\alpha/\!/\beta$,则 $l\perp\alpha$,又 $m\subset\alpha$,所以 $l\perp m$,B 中说法正确.对于 C,若 $l\subset\alpha$,$m\subset\alpha$,$m/\!/\beta$,$l/\!/\beta$,则 α 与 β 相交或平行,C 中说法错误.对于 D,若 $m\subset\beta$,$m/\!/\alpha$,则存在直线 $m'\subset\alpha$,使得 $m/\!/m'$,因为 l,m 是异面直线,$l\subset\alpha$,所以 l 与 m' 相交,$m'\not\subset\beta$.因为 $m'/\!/m$,$m\subset\beta$,$m'\not\subset\beta$,所以 $m'/\!/\beta$,又 $l/\!/\beta$,所以 $\alpha/\!/\beta$,D 中说法正确.故选 C.

3. C 【解析】对于 A,如图①,$\alpha\cap\beta=l$,$m\perp l$,$n/\!/l$,$n\not\subset\beta$,$m/\!/\alpha$,则满足 $n/\!/\beta$,$m\perp n$,但平面 α 与 β 不一定垂直,故 A 错误;对于 B,如图②,$\alpha\cap\beta=l$,$n/\!/l$,$n\not\subset\beta$,$m\perp\alpha$,则满足 $n/\!/\beta$,$m\perp n$,但平面 α 与 β 不一定垂直,故 B 错误;对于 C,如图③,$m\perp\alpha$,$n\perp\beta$,$m\perp n$,在直线 m,n 上分别取向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$,则$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$分别为平面 α,β 的法向量,且 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$,所以 $\alpha\perp\beta$,故 C 正确;对于 D,如图④,$\alpha\cap\beta=l$,$m\subset\alpha$,$n\subset\beta$,$m\perp l$,$n/\!/l$,则 $m\perp n$,但平面 α 与 β 不一定垂直,故 D 错误.故选 C.



① ② ③ ④

4. A 【解析】由题意得,半球、圆柱底面和圆台下底面的半径均为$\frac{19}{2}=9.5(\text{m})$,圆台上底面的半径为 1 m,圆台的母线长为$\sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2+31.5^2}=\frac{\sqrt{4258}}{2}\approx 32.6(\text{m})$,则“极目一号”Ⅲ型浮空艇的表面积约为$\frac{1}{2}\times 4\pi\times 9.5^2+2\pi\times 9.5\times 14+\pi(1+9.5)\times 32.6+\pi\times 1^2=180.5\pi+266\pi+342.3\pi+\pi=789.8\pi\approx 789.8\times 3.14\approx 2480(\text{m}^2)$.故选 A.

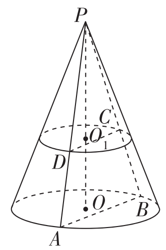
5. D 【解析】设圆台的母线长为 l,高为 h,两底面圆的半径分别为 $R,r(R>r)$,则 $2R=15.5$ cm,$2r=9.2$ cm,$h=4.1-0.7=3.4(\text{cm})$,所以 $l=\sqrt{h^2+\left(\frac{2R-2r}{2}\right)^2}=\sqrt{3.4^2+3.15^2}=\sqrt{21.4825}\approx 4.6(\text{cm})$,故圆台部分的侧面积 $S_1=\pi(R+r)l\approx 3\times(7.75+4.6)\times 4.6=170.43(\text{cm}^2)$.故选 D.

6. D 【解析】连接 SF,则 $\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SE}+\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{SE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{SE}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{SF}-\overrightarrow{SE})=\frac{2}{3}\overrightarrow{SE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SE}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{SB}+$

$\overrightarrow{SC})=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{6}(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}+\frac{1}{6}\boldsymbol{c}$. 故选 D.

7. A 【解析】因为 $PB=PC=1$, $\angle APB=\angle APC=90^\circ$, $\angle BPC=60^\circ$, 所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PC}=(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|\cos\angle BPC-0=1\times1\times\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, 故选 A.

8. D 【解析】如图, 将圆台 O_1O 补成圆锥 PO, 设 PA, PB 为圆锥的两条母线, 平面 α 经过 PA, PB, 则等腰梯形 $ABCD$ 为平面 α 截圆台所得的截面. 设圆台 O_1O 的母线长为 l, 则 $l^2=h^2+(R-r)^2$. 设 $PC=x$, $\angle APB=\theta$, 由 $\frac{r}{R}=\frac{x}{x+l}$, 得 $x=\frac{rl}{R-r}$, 则 $S=S_{\triangle PAB}-S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}[(x+l)^2-x^2]\sin\theta=\frac{R+r}{2(R-r)}l^2\sin\theta$. 当 $h\geqslant R-r$ 时, $\theta_{\max}\leqslant 90^\circ$, 则当 θ 最大, 即截面为轴截面时, S 取得最大值, S 的最大值为 $\frac{1}{2}(2R+2r)h=(R+r)h$; 当 $h<R-r$ 时, $\theta_{\max}>90^\circ$, 则当 $\theta=90^\circ$, 即 $\sin\theta=1$ 时, S 取得最大值, S 的最大值为 $\frac{(R+r)l^2}{2(R-r)}=\frac{(R+r)[h^2+(R-r)^2]}{2(R-r)}$. 故选 D.

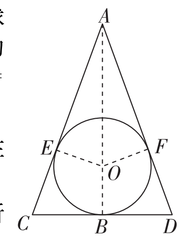


9. BCD 【解析】对于 A, 因为 $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}=-2+2=0$, 所以 $l/\!/\alpha$ 或 $l\subset\alpha$, A 错误. 对于 B, 因为 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=-6+8-2=0$, 所以 $\alpha\perp\beta$, B 正确. 对于 C, 假设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$ 三个向量共面, 则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=x(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+y(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$, 所以 $(1-y)\boldsymbol{a}=(x-1)\boldsymbol{b}+(x+y)\boldsymbol{c}$. 若 $y=1$, 则 $(x-1)\boldsymbol{b}+(x+1)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共线, 与 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间的一个基底矛盾; 若 $y\neq1$, 则 $\boldsymbol{a}=\frac{x-1}{1-y}\boldsymbol{b}+\frac{x+y}{1-y}\boldsymbol{c}$, 则 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面, 与 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间的一个基底矛盾. 所以假设不成立, 即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$ 不共面, 所以 $\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\}$ 也是空间的一个基底, C 正确. 对于 D, 因为 P 为平面 ABC 上的一点, 所以 P, A, B, C 四点共面, 又 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}-n\overrightarrow{OC}$ $(n,m\in\mathbf{R})$, 所以 $\frac{1}{2}+m-n=1$, 所以 $m-n=\frac{1}{2}$, D 正确. 故选 BCD.

10. ABD 【解析】对于 A, $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$, 则 $\overrightarrow{AC_1}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA_1}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}=1^2+1^2+1^2+2\times1\times1\times\cos 60^\circ+2\times1\times1\times\cos 60^\circ+2\times1\times1\times\cos 60^\circ=6$, 故 $AC_1=|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{6}$, 故 A 正确; 对于 B, $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$, 则 $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}=1\times1\times\cos 60^\circ-1^2+1^2-1\times1\times\cos 60^\circ+1\times1\times\cos 60^\circ-1\times1\times\cos 60^\circ=0$, 故 $\overrightarrow{AC_1}\perp\overrightarrow{BD}$, 即 $AC_1\perp BD$, 故 B 正确; 对于 C, 连接 BD_1, B_1D, 则 $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{B_1D}=\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1D}$, 所以 $\overrightarrow{BD_1}^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{DD_1}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DD_1}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DD_1}=1^2+1^2+1^2+2\times1\times1\times\cos 120^\circ+2\times1\times1\times\cos 60^\circ+2\times1\times1\times\cos 120^\circ=2$, 即 $|\overrightarrow{BD_1}|=\sqrt{2}$, 同理 $|\overrightarrow{B_1D}|=\sqrt{2}$, 故四边形 BDD_1B_1 为矩形, 其面积为 $1\times1=1$, 故 C 错误; 对于 D, 连接 AC, 过 A_1 作 $A_1E\perp$ 平面 $ABCD$, 易知 E 在直线 AC 上, 过 E 作 $EF\perp AB$, 垂足为 F, 连接 A_1F, 因为 $A_1E\perp AB$, $EF\perp AB$, $A_1E\cap EF=E$, 所以 $AB\perp$ 平面 A_1EF, 所以 $AB\perp A_1F$, 则 $AF=AA_1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, $AE=\frac{AF}{\cos 30^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $A_1E=\sqrt{AA_1^2-AE^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, 故平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

11. ACD 【解析】对于选项 A, 不管 E 点移动到棱 BB_1 上的哪个位置, 直线 AC 与直线 C_1E 均不相交, 也不平行, 即直线 AC 与直线 C_1E 是异面直线, 所以 A 正确; 对于选项 B, $\triangle AC_1E$ 的周长为 $AC_1+AE+EC_1$, 要使周长最小, 则 $AE+EC_1$ 最小, 因为 $AA_1=AB=2$, $BC=1$, 所以易知 $(AE+EC_1)_{\min}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$, 又 $\angle ABC=90^\circ$, 所以 $AC=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, 所以 $AC_1=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3$, 所以 $\triangle AC_1E$ 周长的最小值为 $3+\sqrt{13}$, 所以 B 错误; 对于选项 C, 由图易知, 二面角 $C\text{-}AC_1\text{-}B$ 的平面角为锐角, 二面角 $C\text{-}AC_1\text{-}B_1$ 的平面角为钝角, 则在点 E 从 B 到 B_1 移动的过程中, 二面角 $C\text{-}AC_1\text{-}E$ 的平面角由锐角变成了钝角, 所以在棱 BB_1 上必然存在点 E 使得平面 $AC_1E\perp$ 平面 AA_1C_1C, 所以 C 正确; 对于选项 D, 要使点 C 到平面 AC_1E 的距离最大, 则二面角 $C\text{-}AC_1\text{-}E$ 的平面角为 90°, 此时平面 $AEC_1\perp$ 平面 ACC_1, 过 C 作 AC_1 的垂线 CF, 垂足为 F, 因为平面 $AEC_1\perp$ 平面 ACC_1, $CF\perp AC_1$, 平面 $AEC_1\cap$ 平面 $ACC_1=AC_1$, $CF\subset$ 平面 ACC_1, 所以 $CF\perp$ 平面 AEC_1, 则线段 CF 的长即为点 C 到平面 AC_1E 的距离, 又 $AC=\sqrt{5}$, $CC_1=2$, $AC_1=3$, $CC_1\perp AC$, 所以 $CF=\frac{AC\cdot CC_1}{AC_1}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$, 所以点 C 到平面 AC_1E 的最大距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$, 所以 D 正确. 故选 ACD.

12. 8π 【解析】如图, 作出该圆锥与其内切球的轴截面, 设内切球的球心为 O, 内切球的半径为 r, E, F, B 为切点, 则 $OE=OF=OB=r$, 由已知得 $BD=DF=2$, $AB=4\sqrt{2}$, 则 $AD=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+2^2}=6$, 所以在 $\triangle AOF$ 中, $AO^2=OF^2+AF^2$, 即 $(4\sqrt{2}-r)^2=r^2+(6-2)^2$, 解得 $r=\sqrt{2}$, 所以该圆锥的内切球的表面积为 $4\pi r^2=8\pi$.



13. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】取 BC 的中点 O, 连接 OA, OD, 因为 $AB=AC=BD=CD=2$, $BC=2\sqrt{3}$, 所以 $OD\perp BC$, $OA\perp BC$, $OD=1$, $OA=1$, 所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times1\times2\sqrt{3}=\sqrt{3}$. 易知当 $OD\perp$ 平面 ABC 时, 该四面体的体积取得最大值, 最大值为 $\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot OD=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

14. $\frac{52\pi}{3}$ 【解析】设 F, G 分别是 DE, BC 的中点, 则 A, F, G 三点共线, 连接 AG, 则 F 在 AG 上, 且 $AF\perp DE$, $AG\perp BC$. 设等边三角形 ADE 的外接圆圆心为 O_1, 半径为 r_1, 则由正弦定理得 $2r_1=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$, 所以 $r_1=\frac{2}{\sqrt{3}}$, 则 $O_1F=AF-r_1=\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 设等腰梯形 $BCED$ 的外接圆圆心为 O_2, 半径为 r_2, 连接 GE, GD, 因为 $GE=GD=GB=GC=2$, 所以 $r_2=2$, 且 O_2 与 G 重合. 依题意可知, 当四棱锥 $A'\text{-}BCED$ 的体积最大时, 平面 $A'DE\perp$ 平面 $BCED$, 此时设四棱锥 $A'\text{-}BCED$ 的外接球的半径为 R, 则 $R^2=O_1F^2+r_2^2=\frac{1}{3}+4=\frac{13}{3}$, 所以此时四棱锥 $A'\text{-}BCED$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\times\frac{13}{3}=\frac{52\pi}{3}$.

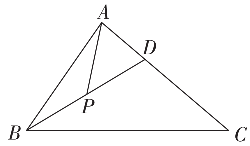
训练 13 滚动练习

1. A 【解析】由已知得 $N=\{x\,|\,x\geqslant0\}$, $\therefore M\cap N=\{x\,|\,0\leqslant x<6\}$. 故选 A.

2. B 【解析】要使函数 $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{4-x}}+\sqrt{2^x-2}$ 有意义, 需满足 $\begin{cases}4-x>0,\\2^x-2\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant x<4$, 故 $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{4-x}}+\sqrt{2^x-2}$

的定义域为$[1,4)$. 故选 B.

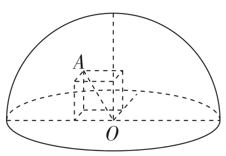
3. D 【解析】如图，因为 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$，所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，所以 $\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{1}{6}$，所以 $\lambda+\mu=\frac{2}{3}$. 故选 D.



4. B 【解析】$2a_{n+1}-2=a_n\cdot a_{n+1}$，易知 $a_n\neq 2$，则 $a_{n+1}=\frac{2}{2-a_n}$，由 $a_1=3$，得 $a_2=\frac{2}{2-3}=-2$，$a_3=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$，$a_4=\frac{2}{2-\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$，$a_5=\frac{2}{2-\frac{4}{3}}=3$，…，由此可知数列$\{a_n\}$是以 4 为周期的周期数列，故 $a_{2024}=a_{4\times 505+4}=a_4=\frac{4}{3}$. 故选 B.

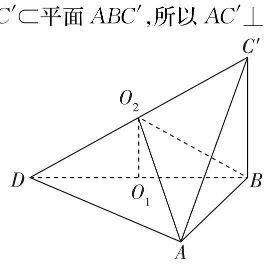
5. D 【解析】$\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\right]=\cos 2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)-\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)}{\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{1-\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)}{1+\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{7}{25}$. 故选 D.

6. C 【解析】要使半球形容器内壁的半径最小，只需使 4 个小球与半球形容器的内壁都相切，此时如图所示，其中 O 为半球形容器内壁的球心，A 为其中一个小球的球心，连接 OA，则 OA 是棱长为 2 的正方体的体对角线，且球 A 与半球形容器内壁的切点与 O，A 共线，所以半球形容器内壁的半径的最小值为球 A 的半径与 OA 长度之和，即 $2\sqrt{3}+2$. 故选 C.



7. C 【解析】由 $f(x)+1-e^{2x}[1+f(-x)]=0$，得 $\frac{f(x)+1}{e^x}=\frac{f(-x)+1}{e^{-x}}$，$x\in\mathbf{R}$，令 $g(x)=\frac{f(x)+1}{e^x}$，则 $g(-x)=g(x)$，所以 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，求导得 $g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)-1}{e^x}$. 因为当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)-f(x)>1$，即 $f'(x)-f(x)-1>0$，所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. $g(1)=\frac{f(1)+1}{e^1}=e$，由 $f(x-1)>e^x-1$，得 $f(x-1)+1>e^x$，即 $\frac{f(x-1)+1}{e^x}>1$，即 $\frac{f(x-1)+1}{e^{x-1}}>e$，即 $g(x-1)>g(1)$，所以 $g(|x-1|)>g(1)$，所以 $|x-1|>1$，解得 $x>2$ 或 $x<0$，则原不等式的解集为 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$. 故选 C.

8. A 【解析】如图，设 BD，$C'D$ 的中点分别为 O_1，O_2，连接 O_1O_2，O_2B，O_2A，则 $O_1O_2 /\!/ C'B$. 因为平面 $C'BD\perp$ 平面 ABD，平面 $C'BD\cap$ 平面 $ABD=BD$，$C'B\subset$ 平面 $C'BD$，$C'B\perp BD$，所以 $C'B\perp$ 平面 ABD. 因为 $AD\subset$ 平面 ABD，所以 $C'B\perp AD$. 又 $AD\perp AB$，$AB\cap C'B=B$，AB，$C'B\subset$ 平面 ABC'，所以 $AD\perp$ 平面 ABC'，又 $AC'\subset$ 平面 ABC'，所以 $AC'\perp AD$. 因为 O_2 为 $C'D$ 的中点，$C'B\perp BD$，$AC'\perp AD$，所以 $O_2C'=O_2A=O_2B=O_2D$，所以 O_2 为三棱锥 C'-ABD 的外接球的球心，又 $O_1O_2=\frac{1}{2}C'B=\frac{1}{2}CB=1$，$O_1B=\frac{1}{2}BD=\frac{\sqrt{AB^2+AD^2}}{2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，$O_1O_2\perp BD$，

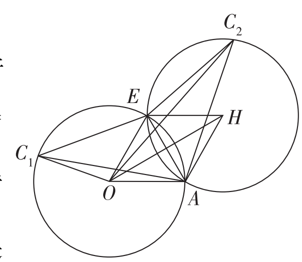


所以球 O_2 的半径 $R=O_2B=\sqrt{O_1O_2^2+O_1B^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$，故球 O_2 的表面积为 $4\pi R^2=17\pi$. 故选 A.

9. ABC 【解析】设数列$\{a_n\}$的公差为 d，则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，所以 $\begin{cases}k=\frac{d}{2},\\16=a_1-\frac{d}{2},\\k+1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\d=-2,\\a_1=15,\end{cases}$ 故 A 正确；$a_n=a_1+(n-1)d=17-2n$，故 B 正确；$S_n=-n^2+16n=-(n-8)^2+64$，所以当 $n=8$ 时，S_n 取得最大值，故 C 正确，D 错误. 故选 ABC.

10. BD 【解析】由题意知 $f(x)=2\sin\omega x\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x-\frac{1}{2}\sin\omega x\right)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-\sin^2\omega x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\frac{1}{2}\cos 2\omega x-\frac{1}{2}=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$，因为 $T=\pi=\frac{2\pi}{2\omega}$，所以 $\omega=1$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$，故 A 错误；因为 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{12},-\frac{1}{2}\right)$ 中心对称，故 B 正确；若 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$，则 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$，则 $f(x)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上的最小值为 -1，故 C 错误；将 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，得到函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$ 的图象，再把得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}$ 的图象，即函数 $g(x)$ 的图象，故 D 正确. 故选 BD.

11. ACD 【解析】对于 A，因为 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，所以 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+t^2\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{4-2t+t^2}=\sqrt{(t-1)^2+3}$，所以当 $t=1$ 时，$|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}|$ 取得最小值 $\sqrt{3}$，故 A 正确. 对于 B，由 $\frac{m^2}{2}+\frac{n^2}{5}=1$，得 $5m^2+2n^2=10$，则 $|m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}|=\sqrt{(m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{m^2\boldsymbol{a}^2+2mn\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+n^2\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{4m^2+2mn+n^2}\leqslant\sqrt{4m^2+(m^2+n^2)+n^2}=\sqrt{5m^2+2n^2}=\sqrt{10}$，当且仅当 $m=n=\pm\frac{\sqrt{70}}{7}$ 时等号成立，故 B 错误. 对于 C，D，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1\times\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=1$，得 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{1}{2}$，又 $0°\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant180°$，所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60°$. 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OE}=2\boldsymbol{b}$，则 $\angle EOA=60°$，$OE=OA=2$，以 O 为圆心，OA 为半径作圆，如图. 设 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，则 $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AC}$，$\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b}=\overrightarrow{EC}$，当 C 是圆 O 的优弧 AE 上的点时，满足 $\langle\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b}\rangle=30°$，作点 O 关于直线 AE 的对称点 H，则 $\angle EHA=60°$，以 H 为圆心，HA 为半径作圆，当 C 是圆 H 的优弧 AE 上的点时，也满足 $\langle\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b}\rangle=30°$，当 C 不是这两段优弧上的点时，都不满足 $\angle ACE=30°$，即不满足 $\langle\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b}\rangle=30°$. 易知 $OH=2\sqrt{3}$，圆 O，圆 H 的半径都是 2，由图可知，$|\boldsymbol{c}|$ 的最小值是 2，最大值是 $2\sqrt{3}+2$，故 C，D 正确. 故选 ACD.



12. $\sqrt{13}$ 【解析】由 $(1-i)z=1+5i$，可得 $z=\frac{1+5i}{1-i}=$

$\frac{(1+5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-4+6i}{2}=-2+3i$,故$|z|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$.

13. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】∵$\boldsymbol{a}=(1,t)$,$\boldsymbol{b}=(-3,1)$,∴$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,2t+1)$,又$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$,∴$(-1)\times(-3)+(2t+1)\times1=0$,解得$t=-2$,∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1,-2)\cdot(-3,1)=-5$,∴$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-5}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\times\sqrt{(-3)^2+1^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. $\left[\frac{1}{9},+\infty\right)$ 【解析】由$a_{n+1}=3a_n+2$,得$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$,因为$a_1=2$,所以$a_1+1=3$,所以数列$\{a_n+1\}$是以3为首项,3为公比的等比数列,所以$a_n+1=3\times3^{n-1}=3^n$.对任意正整数n,都有$k(a_n+1)\geqslant2n-3$,即$k\cdot3^n\geqslant2n-3$,即$k\geqslant\frac{2n-3}{3^n}$.设$b_n=\frac{2n-3}{3^n}$,则$b_{n+1}-b_n=\frac{2(n+1)-3}{3^{n+1}}-\frac{2n-3}{3^n}=\frac{8-4n}{3^{n+1}}$,当$n=1$时,$b_{n+1}-b_n>0$,当$n=2$时,$b_{n+1}-b_n=0$,当$n>2$时,$b_{n+1}-b_n<0$,所以$b_1<b_2=b_3>b_4>b_5>b_6>\cdots$,所以$\{b_n\}$的最大项为$b_2=b_3=\frac{1}{9}$,所以$k$的取值范围为$\left[\frac{1}{9},+\infty\right)$.

训练 14 平面解析几何

1. D 【解析】由直线$l_1:(a+2)x+y-1=0$与直线$l_2:2x+(a+3)y+a-1=0$平行,知直线l_1与直线l_2的斜率均存在,则直线l_1的方程可化为$y=-(a+2)x+1$,直线l_2的方程可化为$y=-\frac{2}{a+3}x+\frac{1-a}{a+3}$,所以$-(a+2)=-\frac{2}{a+3}$且$1\neq\frac{1-a}{a+3}$,解得$a=-4$.故选D.

2. C 【解析】由已知得圆C的圆心为$C(-1,1)$,半径$r=\sqrt{5}$,则圆心C到直线$x+y+b=0$的距离$d=\frac{|b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}$,所以$|b|=\sqrt{10}$,即$b=\pm\sqrt{10}$,所以“$b=\pm\sqrt{10}$”是“直线$x+y+b=0$与圆$C:(x+1)^2+(y-1)^2=5$相切”的充要条件.故选C.

3. A 【解析】连接OC,PC,因为O为坐标原点,P在圆$C:(x-2)^2+(y-1)^2=1$上,OP与圆C相切,所以$|OP|=\sqrt{|OC|^2-|PC|^2}=\sqrt{5-1}=2$.故选A.

4. B 【解析】由题意得$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$,则$\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$,所以椭圆$C_2$的离心率$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$.故选B.

5. B 【解析】设$|PF_1|=m$,$|PF_2|=n$,不妨设$m>n$,则$m+n=6$,$4c^2=m^2+n^2-2mn\cos\angle F_1PF_2$,即$12=m^2+n^2-\frac{6}{5}mn$,可得$mn=\frac{15}{2}$,$m^2+n^2=21$,又$\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2})$,所以$|\overrightarrow{PO}|^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{PF_1}|^2+|\overrightarrow{PF_2}|^2+2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2})=\frac{1}{4}(m^2+n^2+2mn\cos\angle F_1PF_2)=\frac{1}{4}\left(m^2+n^2+\frac{6}{5}mn\right)=\frac{1}{4}\times\left(21+\frac{6}{5}\times\frac{15}{2}\right)=\frac{15}{2}$,所以$|PO|=\frac{\sqrt{30}}{2}$.故选B.

6. B 【解析】双曲线C的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$,由$x=a$,得$y=\pm b$,则$|DE|=2b$,故$S_{\triangle ODE}=ab=8$.又$c^2=a^2+b^2\geqslant2ab=16$(当且仅当$a=b$时取等号),即$c\geqslant4$,所以$C$的焦距$2c$的最小值为8.

7. D 【解析】设该双曲线的左焦点为F,连接PF,AF,则由双曲线的定义可得$|PF_1|=|PF|+2a$,$|AF|=|AF_1|=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$,又$|AP|+|PF|\geqslant|AF|=3$,当且仅当$A,P,F$三点共线且点$P$在$A,F$之间时等号成立,所以$\triangle APF_1$的周长为$|AP|+|AF_1|+|PF_1|=|AF_1|+|AP|+|PF|+2a\geqslant3+3+2a=6+2a$,当且仅当$A,P,F$三点共线且点$P$在$A,F$之间时,$\triangle APF_1$的周长取得最小值,即$6+2a=8$,解得$a=1$.故选D.

8. C 【解析】设$P(x_0,y_0)$,易知$B(0,b)$,由$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,得$x_0^2=a^2\left(1-\frac{y_0^2}{b^2}\right)$,则$|PB|^2=x_0^2+(y_0-b)^2=x_0^2+y_0^2-2by_0+b^2=a^2\left(1-\frac{y_0^2}{b^2}\right)+y_0^2-2by_0+b^2=-\frac{c^2}{b^2}y_0^2-2by_0+a^2+b^2$,$y_0\in[-b,b]$.由题知,当$y_0=-b$时,$|PB|^2$取得最大值,所以由二次函数图像的对称性知$-\frac{b^3}{c^2}\leqslant-b$,故$b^2\geqslant c^2$,即$a^2-c^2\geqslant c^2$,所以$\frac{c}{a}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,即椭圆$C$的离心率$e\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$,故选C.

9. BC 【解析】直线$l:kx-y+2k=0$,即$k(x+2)-y=0$,则直线l过定点$(-2,0)$,故A错误;当$k=-2$时,直线$l:kx-y+2k=0$与直线$l_0:x-2y+2=0$垂直,故B正确;∵定点$(-2,0)$在圆$O:x^2+y^2=16$内,∴直线l与圆O相交,故C正确;当$k=-1$时,直线l为$-x-y-2=0$,即$x+y+2=0$,圆心O到直线l的距离$d=\frac{|2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,则直线$l$被圆$O$截得的弦长为$2\times\sqrt{16-2}=2\sqrt{14}$,故D错误.故选BC.

10. BCD 【解析】由椭圆的方程$\frac{x^2}{9}+y^2=1$可知,$a^2=9$,$b^2=1$,所以$a=3$,$b=1$,$c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{2}$.由椭圆的定义知,$\triangle PF_1F_2$的周长为$|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=6+4\sqrt{2}$,故A错误;椭圆的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,故B正确;由椭圆的几何性质可知,$|PF_2|$的最大值为$a+c=3+2\sqrt{2}$,故C正确;设$P(x_0,y_0)$,$A(x_1,y_1)$,则$B(-x_1,-y_1)$,所以$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}=\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}$,由点$A,P$在椭圆上可得$\begin{cases}\frac{x_0^2}{9}+y_0^2=1,\\ \frac{x_1^2}{9}+y_1^2=1,\end{cases}$两式相减可得$\frac{x_0^2-x_1^2}{9}+y_0^2-y_1^2=0$,化简可得$\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=-\frac{1}{9}$,即$k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{1}{9}$,故D正确.故选BCD.

11. BCD 【解析】分别过点A,B作抛物线C的准线的垂线,垂足分别为点E,M.设抛物线C的准线交x轴于点P,则$|PF|=p$,因为直线l的斜率为$\sqrt{3}$,所以直线l的倾斜角为$60°$,又因为$AE\parallel x$轴,所以$\angle EAF=60°$,由抛物线的定义可知$|AE|=|AF|$,连接EF,则$\triangle AEF$为等边三角形,所以$\angle EFP=\angle AEF=\angle EAF=60°$,则$\angle PEF=30°$,$\angle ADE=30°$.设$|BD|=x$,则$|AD|=x+8$,$|BM|=\frac{x}{2}$,由$\mathrm{Rt}\triangle DBM\backsim\mathrm{Rt}\triangle DAE$,得$\frac{|BM|}{|AE|}=\frac{|BD|}{|AD|}$,可得$|AE|=4+\frac{x}{2}$,所以$|BM|=|BF|=\frac{x}{2}$,$|AE|=|AF|=4+\frac{x}{2}$,则$|AB|=|AF|+|BF|=4+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}=8$,解得$x=4$,所以$|BF|=2$,$|AF|=6$,故B正确.$|AF|=|EF|=2|PF|=2p=6$,解得$p=3$,故A错误.$|BD|=4$,满足$|BD|=4=2|BF|$,故C正确.$|DF|=|BD|+|BF|=4+2=6=|AF|$,所以$F$为$AD$的中点,故D正确.故选BCD.

12. 6 【解析】由题得焦点F的坐标为$\left(\frac{p}{2},0\right)$,则线段$AF$的中点$B$的坐标为$\left(\frac{p}{4},4\sqrt{2}\right)$,将点$B$的坐标代入抛物线$C$的方程得$32=2p\cdot\frac{p}{4}$,可得$p=8$,故点$B$到直线$l$的距离

$d=|BF|=\frac{p}{4}+\frac{p}{2}=\frac{3p}{4}=6$.

13. 4 **【解析】** 由椭圆 C 的方程可知 $a=4,b=2,c=2\sqrt{3}$，根据椭圆的定义可知 $|\overrightarrow{PF_1}|+|\overrightarrow{PF_2}|=2a=8$，因为 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，所以 $|\overrightarrow{PF_1}|^2+|\overrightarrow{PF_2}|^2=4c^2=48$，所以 $2|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|=(|\overrightarrow{PF_1}|+|\overrightarrow{PF_2}|)^2-(|\overrightarrow{PF_1}|^2+|\overrightarrow{PF_2}|^2)=64-48=16$，故 $\triangle PF_1F_2$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|=4$.

14. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **【解析】** 方法一(坐标法)：依题可设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$B(0,n)$，由 $\overrightarrow{F_2A}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，可得 $A\left(\frac{5}{3}c,-\frac{2}{3}n\right)$，所以 $\overrightarrow{F_1A}=\left(\frac{8}{3}c,-\frac{2}{3}n\right)$，又 $\overrightarrow{F_1B}=(c,n)$，所以由 $\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$ 可得 $\frac{8}{3}c^2-\frac{2}{3}n^2=0$，即 $n^2=4c^2$. 因为点 A 在 C 上，所以 $\frac{\frac{25}{9}c^2}{a^2}-\frac{\frac{4}{9}n^2}{b^2}=1$，即 $25\frac{c^2}{a^2}-16\frac{c^2}{c^2-a^2}=9$，即 $25e^2-\frac{16e^2}{e^2-1}=9$，解得 $e^2=\frac{9}{5}$ 或 $e^2=\frac{1}{5}$(舍去)，所以 $e=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

方法二(几何法)：由 $\overrightarrow{F_2A}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$ 可得 $\frac{|\overrightarrow{F_2A}|}{|\overrightarrow{F_2B}|}=\frac{2}{3}$，设 $|F_2A|=2x$，$|F_2B|=3x$，由对称性可得 $|F_1B|=3x$，易知点 A 在双曲线的右支上，根据双曲线的定义可得 $|F_1A|=2x+2a$. 又 $|AB|=5x$，$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$，所以 $\sin\angle F_1AF_2=\frac{|F_1B|}{|AB|}=\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$，所以 $\cos\angle F_1AF_2=\frac{4}{5}$，即 $\frac{|F_1A|}{|AB|}=\frac{2x+2a}{5x}=\frac{4}{5}$，可得 $x=a$，所以 $|AF_1|=4a$，$|AF_2|=2a$. 在 $\triangle AF_1F_2$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle F_1AF_2=\frac{4}{5}=\frac{16a^2+4a^2-4c^2}{16a^2}$，即 $5c^2=9a^2$，得 $e=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

训练 15 滚动练习

1. A **【解析】** 由已知得 $A=\{x|x^2-x-2\leqslant 0\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|\sqrt{x-1}<1\}=\{x|1\leqslant x<2\}$，所以 $A\cup B=[-1,2]$. 故选 A.

2. C **【解析】** 因为 $z=\frac{(4+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+6i}{2}=1+3i$，所以 $\overline{z}=1-3i$. 故选 C.

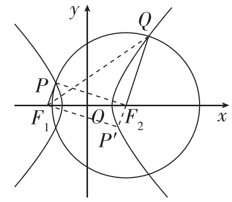
3. B **【解析】** 由题得 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{(-1,2)}{\sqrt{5}}=\left(-\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$. 故选 B.

4. C **【解析】** 由 $x>0$，可得 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，故充分性成立. 由 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ 可得 $x+\frac{1}{x}-2\geqslant 0$，即 $\frac{x^2+1-2x}{x}\geqslant 0$，即 $\frac{(x-1)^2}{x}\geqslant 0$，所以 $x>0$，故必要性成立. 故 p 是 q 的充要条件. 故选 C.

5. A **【解析】** 因为 $a_1+a_3+a_4=a_2+a_3+a_3=a_2+2a_3=24$，所以 $\frac{1}{2}a_2+a_3=12$. 故选 A.

6. C **【解析】** 由 $C=\frac{\pi}{4}$，$b\sin\left(\frac{\pi}{4}+A\right)-a\sin\left(\frac{\pi}{4}+B\right)=c$，及正弦定理可得，$\sin B\sin\left(\frac{\pi}{4}+A\right)-\sin A\sin\left(\frac{\pi}{4}+B\right)=\sin C$，整理得 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin B\cos A-\sin A\cos B)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\sin(B-A)=1$. 因为 $A,B\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$，所以 $B-A\in\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，所以 $B-A=\frac{\pi}{2}$，又 $B+A=\frac{3\pi}{4}$，所以 $B=\frac{5\pi}{8}$.

7. D **【解析】** 延长 QF_2 与双曲线 C 的右支交于另一点 P'，因为 $F_1P/\!/F_2P'$，所以 $|F_1P|=|F_2P'|$. 设 $|F_2P'|=|F_1P|=t$，连接 F_2P，则 $|F_2P|=|F_2Q|=3t$，所以 $|F_2P|-|F_1P|=2t=2a$，即 $t=a$，所以 $|P'Q|=4t=4a$，连接 QF_1，F_1P'，则 $|QF_1|=|QF_2|+2a=5a$，$|F_1P'|=|F_2P|=3a$，即 $|P'Q|^2+|F_1P'|^2=|QF_1|^2$，所以 $\angle F_1P'Q=90^\circ$. 在 $\triangle P'F_1F_2$ 中，有 $|F_2P'|^2+|F_1P'|^2=|F_1F_2|^2$，即 $a^2+(3a)^2=4c^2$，即 $5a^2=2c^2$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 故选 D.



8. B **【解析】** 由不等式 $e^x(x-a)\leqslant x$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立，得 $a\geqslant x-\frac{x}{e^x}$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立. 设 $f(x)=x-\frac{x}{e^x}$，则 $f'(x)=\frac{e^x+x-1}{e^x}$，设 $g(x)=e^x+x-1$，则 $g'(x)=e^x+1>0$ 恒成立，所以 $g(x)=e^x+x-1$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，又 $g(0)=e^0+0-1=0$，所以当 $x\in[-1,0)$ 时，$g(x)=e^x+x-1<0$，即 $f'(x)=\frac{e^x+x-1}{e^x}<0$，则 $f(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,1]$ 时，$g(x)=e^x+x-1>0$，即 $f'(x)=\frac{e^x+x-1}{e^x}>0$，则 $f(x)$ 单调递增，又 $f(1)=1-\frac{1}{e}$，$f(-1)=-1+e$，所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为 $e-1$，又 $a\geqslant f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立，所以 $a\geqslant e-1$. 故选 B.

9. ABC **【解析】** 由题图知，当 $x\in(-1,2)\cup(4,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，则函数 $f(x)$ 在 $(-1,2)$，$(4,+\infty)$ 上单调递增，当 $x\in(-3,-1)\cup(2,4)$ 时，$f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 在 $(-3,-1)$，$(2,4)$ 上单调递减，故 A，C 正确；当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 取得极小值，则 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，故 B 正确；当 $x=2$ 时，$f(x)$ 取得极大值，所以 $x=2$ 不是 $f(x)$ 的极小值点，故 D 错误. 故选 ABC.

10. ABC **【解析】** 对于选项 A，$(\cosh x)^2-(\sinh x)^2=(\cosh x+\sinh x)\cdot(\cosh x-\sinh x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=e^x\cdot e^{-x}=1$，故 A 正确；对于选项 B，因为双曲正弦函数与双曲余弦函数的定义域均为 $\mathbf{R}$，关于原点对称，且有 $\sinh(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}=-\frac{e^x-e^{-x}}{2}=-\sinh x$，$\cosh(-x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x$，所以双曲正弦函数是奇函数，双曲余弦函数是偶函数，故 B 正确；对于选项 C，设 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，则 $f'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\geqslant 1$(当且仅当 $x=0$ 时等号成立)，即 $\tan\alpha\geqslant 1$，所以 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，故 C 正确；对于选项 D，左边 $=\frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2}$，右边 $=\frac{(e^{x+y}+e^{x-y}+e^{y-x}+e^{-x-y})-(e^{x+y}+e^{-x-y}-e^{x-y}-e^{y-x})}{2\times 2}=\frac{2e^{x-y}+2e^{y-x}}{4}=\frac{e^{x-y}+e^{y-x}}{2}$，左边 $\neq$ 右边，故 D 错误. 故选 ABC.

11. BCD **【解析】** 直线 $l_1:x+ky=0$ 中，令 $y=0$，则 $x=0$，则 $A(0,0)$. 直线 l_2 的方程 $kx-y+3-k=0$ 可整理得 $k(x-1)-y+3=0$，令 $x=1$，则 $y=3$，则 $B(1,3)$. 对于 A，当 $k=0$ 时，直线 $l_1:x=0$，直线 $l_2:y=3$，此时直线 l_1，l_2 垂直；当 $k\neq 0$ 时，$k_{l_1}=-\frac{1}{k}$，$k_{l_2}=k$，显然 $k_{l_1}\cdot k_{l_2}=-1$，两直线垂

直. 综上可知, 直线 l_1, l_2 垂直, 则 $|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=10$, 故 A 错误. 对于 B, $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|PA|\cdot|PB|\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{|PA|^2+|PB|^2}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{10}{2}=\frac{5}{2}$, 当且仅当 $|PA|=|PB|=\sqrt{5}$ 时, 等号成立, 故 B 正确. 对于 C, 因为 $|PA|^2+|PB|^2=10\geqslant 2|PA|\cdot|PB|$, 所以 $|PA|\cdot|PB|\leqslant 5$, 则 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{|PA|}\cdot\frac{1}{|PB|}}\geqslant\frac{2}{5}\sqrt{5}$, 当且仅当 $|PA|=|PB|=\sqrt{5}$ 时等号成立, 故 C 正确. 对于 D, 设 $|AP|=\sqrt{10}\cos\theta$, $|BP|=\sqrt{10}\sin\theta$, $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $|AP|+\sqrt{3}|BP|=2\sqrt{10}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 2\sqrt{10}$, 当且仅当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时等号成立, 故 D 正确. 故选 BCD.

12. 0 **[解析]** 取 $x=y$, 有 $f(2x)=f(x^2)+f(2x)$, 则 $f(x^2)=0$ 恒成立, 取 $x=\sqrt{2}$, 则 $f(2)=0$.

13. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ **[解析]** 因为三棱锥 $O\text{-}PAB$ 为正三棱锥, 所以 $PA=PB=AB=2$, $OA=OB=OP$, 因为 $PO\perp AO$, $PO\perp OB$, 所以 $OA=OB=OP=\sqrt{2}$, 即圆锥的底面半径 $r=\sqrt{2}$, 所以 $V_{圆锥PO}=\frac{1}{3}\times\pi\times(\sqrt{2})^2\times\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$.

14. $\left[\frac{1}{3},\frac{7}{6}\right]$ **[解析]** 依题意得, $f(x)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$, 当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时, $\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}<\omega x+\frac{\pi}{3}<\omega\pi+\frac{\pi}{3}$, 因为 $\omega>0$, 且函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减, 所以 $\begin{cases}\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\geqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,\\ \omega\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$, 解得 $\frac{1}{3}+4k\leqslant\omega\leqslant\frac{7}{6}+2k$, $k\in\mathbf{Z}$, 因为 $\omega>0$, 所以 $0<\frac{1}{3}+4k\leqslant\frac{7}{6}+2k$, $k\in\mathbf{Z}$, 所以 $-\frac{1}{12}<k\leqslant\frac{5}{12}$, $k\in\mathbf{Z}$, 则 $k=0$, 所以 $\frac{1}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{7}{6}$.

训练 16 概率与统计

1. A **[解析]** 由题可知, $(1+x)^n$ 的展开式的项数为 10 或 11 或 12, 所以 n 的值为 9 或 10 或 11, 故 n 的值不可能是 8, 故选 A.

2. D **[解析]** 因为只有一个假命题, 所以乙、丙都为真命题, 则 $\mu=m$, $P(X>m+1)=P(X<m-1)>P(X<m-2)$, 故甲为真命题, 根据正态曲线的对称性可得 $P(m-1<X<m)=P(m<X<m+1)>P(m+1<X<m+2)$, 故丁为假命题. 故选 D.

3. A **[解析]** 设事件 A="从该地区任选一人, 此人的年龄位于区间[40,50)内", 事件 B="此人患该疾病", 则 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.15\%\times\frac{20}{100}}{30\%}=0.001$. 故选 A.

4. D **[解析]** 由题可得 $P(A)=\frac{6\times6-5\times5}{6\times6}=\frac{11}{36}$, $P(AB)=\frac{2\times5}{6\times6}=\frac{5}{18}$, 所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{18}}{\frac{11}{36}}=\frac{10}{11}$. 故选 D.

5. C **[解析]** 投掷两个质地均匀的骰子, 样本空间的样本点总数为 $6\times6=36$, 事件 A 包含的样本点为(1,3), (3,1), 共 2 个, 事件 B 包含的样本点为(3,6), (6,3), 共 2 个, 事件 C 包含的样本点为(1,3), (2,3), (3,3), (4,3), (5,3), (6,3), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (3,6), 共 11 个. $\therefore P(A)=P(B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$, C 正确; $P(C)=\frac{11}{36}$, D 错误; $\because P(AB)=0\neq P(A)P(B)$, $\therefore A$, B 不是相互独立事件, A 错误; $\because$ 事件 A 和事件 C 可能同时发生, $\therefore A$, C 不是互斥事件, B 错误. 故选 C.

6. C **[解析]** A 菜有 2 人选用有 C_3^2 种情形, 不妨设甲、乙选用了 A 菜. ①甲、乙之中有 1 人选用了 B 菜, 有 C_2^1 种情形, 不妨设甲选用了 B 菜, 则乙从 C, D, E 中任意选用 1 种, 有 C_3^1 种情形, 丙从 C, D, E 中任意选用 2 种, 有 C_3^2 种情形, 故共有 $C_3^2C_2^1C_3^1C_3^2=54$(种)情形. ②丙选用了 B 菜, 丙再从 C, D, E 中任意选用 1 种, 有 C_3^1 种情形, 甲、乙再从 C, D, E 中各任意选用 1 种, 有 $C_3^1C_3^1$ 种情形, 故共有 $C_3^2C_3^1C_3^1C_3^1=81$(种)情形. 由①②可知所有情形有 $54+81=135$(种). 故选 C.

7. A **[解析]** 若两次取球后, 盒子 A 中恰有 8 个球, 则两次取球均为甲胜, 即两次取球均为同色. 若第一次取球甲、乙都取到红球, 概率为 $\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$, 则第一次取球后盒子 A 中有 4 个红球和 3 个白球, 盒子 B 中有 2 个红球和 3 个白球, 第二次取同色球分为取到红球或取到白球, 概率为 $\frac{4}{7}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{17}{35}$, 故第一次取球甲、乙都取到红球且两次取球后, 盒子 A 中恰有 8 个球的概率为 $\frac{1}{4}\times\frac{17}{35}=\frac{17}{140}$. 同理, 第一次取球甲、乙都取到白球且两次取球后, 盒子 A 中恰有 8 个球的概率为 $\frac{17}{140}$, 所以两次取球后, 盒子 A 中恰有 8 个球的概率是 $\frac{17}{140}+\frac{17}{140}=\frac{17}{70}$. 故选 A.

8. B **[解析]** 将此骰子任意抛掷 2 次, 则样本空间中样本点总数为 36. 显然 $Y_1=\max\{X_1,X_2\}$, 因为事件 A="$Y_1=5$", 所以 X_1, X_2 中有一个数字是 5, 另一个数字小于或等于 5, 事件 A 包含的样本点个数为 $5\times2-1=9$. 显然 $Y_2=\min\{X_1,X_2\}$, 所以事件 AB 包含的样本点为(3,5), (5,3), 共 2 个, 所以 $P(A)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$, $P(AB)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$, 所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2}{9}$. 故选 B.

9. ABC **[解析]** 因为 $X\sim N(1,3^2)$, 所以 $E(X)=\mu=1$, $D(X)=\sigma^2=9$, A 正确; 因为 $P(X>2)=P(X<0)=p$, 所以 $P(0<X\leqslant1)=\frac{1}{2}-p$, B 正确; 因为 $\mu=1$, 所以 $P(X>1)=\frac{1}{2}$, C 正确; 因为 $2X+Y=4$, 所以 $Y=4-2X$, 所以 $E(Y)=E(4-2X)=-2E(X)+4=2$, D 错误. 故选 ABC.

10. BD **[解析]** 由题可得, $P(A_1)=\frac{4}{9}$, $P(A_2)=\frac{2}{9}$, $P(A_3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, $P(B|A_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $P(B|A_2)=\frac{3}{10}$, $P(B|A_3)=\frac{3}{10}$, 则 $P(A_1B)=P(B|A_1)P(A_1)=\frac{2}{5}\times\frac{4}{9}=\frac{8}{45}$, $P(A_2B)=P(B|A_2)P(A_2)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$, $P(A_3B)=P(B|A_3)P(A_3)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$, 所以 $P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)=\frac{31}{90}$, $P(A_1)P(B)\neq P(A_1B)$, 即事件 B 与事件 A_1 不相互独立, $P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{31}{90}}=\frac{6}{31}$, 故 A, C 错误, B, D 正确, 故选 BD.

11. BCD **[解析]** 由题可知, 当 $n=1$ 时, $P_1=\frac{2}{5}$, 故选项 A 错误. 当 $n\geqslant2$ 时, P_{n-1} 表示移动 $(n-1)$ 次后蚂蚁在平面 ABC 上的概率, $1-P_{n-1}$ 表示移动 $(n-1)$ 次后蚂蚁在平面

$A_1B_1C_1$ 上的概率,则 $P_n=\frac{2}{5}P_{n-1}+\frac{3}{5}(1-P_{n-1})$,整理得 $P_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{5}\left(P_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$,又 $P_1-\frac{1}{2}=-\frac{1}{10}$,所以 $\left\{P_n-\frac{1}{2}\right\}$ 是等比数列,且其首项为 $-\frac{1}{10}$,公比为 $-\frac{1}{5}$,故 C 正确. 由 $P_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$,得 $P_n=-\frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}$,故 $P_2=\frac{13}{25}$,故 B,D 正确. 故选 BCD.

12. 0.228 【解析】记"这名同学答对第 i 个问题"为事件 $A_i(i=1,2,3)$,则 $P(A_1)=0.8$,$P(A_2)=0.7$,$P(A_3)=0.6$,这名同学得 300 分包括两种情况,一是答对第一个和第三个问题,二是答对第二个和第三个问题,这两种情况是互斥的,所以所求概率 $P=P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3)=P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3)+P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3)=0.8\times0.3\times0.6+0.2\times0.7\times0.6=0.228$.

13. $\frac{4}{15}$ 【解析】记事件 A_i,B_i 分别表示第一次、第二次取到 i 号球,$i=1,2,3$,依题意知 A_1,A_2,A_3 两两互斥,其和为 Ω,且 $P(A_1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,$P(A_2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,$P(A_3)=\frac{1}{6}$,由题可知 $P(B_2|A_1)=\frac{1}{5}$,$P(B_2|A_2)=\frac{2}{5}$,$P(B_2|A_3)=\frac{1}{5}$,所以 $P(B_2)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B_2\mid A_i)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{15}$.

14. $\frac{5}{21}$ 【解析】从 1,2,⋯,9,10 这 10 个数中任取 2 个数,其中取出的 2 个数的和为 5 有 2 种组合,和为 6 有 2 种组合,和为 7 有 3 种组合,和为 8 有 3 种组合,和为 9 有 4 种组合,和为 10 有 4 种组合,和为 11 有 5 种组合,和为 12 有 4 种组合,和为 13 有 4 种组合,和为 14 有 3 种组合,和为 15 有 3 种组合,和为 16 有 2 种组合,和为 17 有 2 种组合,所以所求概率 $P=\frac{4\times(C_2^2+C_3^2+C_4^2)+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{5}{21}$.

训练 17 滚动练习

1. C 【解析】∵ $y=\log_3x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,∴ $A=\{x|\log_3x\leqslant1\}=(0,3]$,则 $A\cap B=(0,2]$. 故选 C.

2. A 【解析】由 $(3+4i)z=2+i$,得 $z=\frac{2+i}{3+4i}=\frac{(2+i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$,所以 $|z|=\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt5}{5}$. 故选 A.

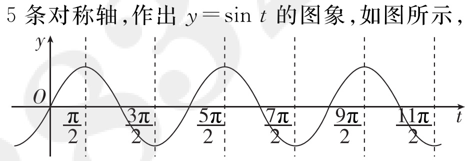
3. B 【解析】由已知得,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,3+x)$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,3-x)$,若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$,即 $3+9-x^2=0$,解得 $x=\pm2\sqrt3$,所以"$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$"是"$x=2\sqrt3$"的必要不充分条件. 故选 B.

4. D 【解析】对于 A,$D(2X-1)=2^2D(X)=4\times6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=6$,故 A 中说法正确;对于 B,因为函数 $f(x)=P(x-1<\xi<x+1)$ 为偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$,所以 $P(-x-1<\xi<-x+1)=P(x-1<\xi<x+1)$,所以区间 $(-x-1,-x+1)$,$(x-1,x+1)$ 关于 $x=\mu$ 对称,则 $\mu=0$,故 B 中说法正确;对于 C,$7\times0.8=5.6$,所以数据 1,3,4,5,7,8,10 的第 80 百分位数是第六个数据 8,故 C 中说法正确;对于 D,由按比例分配的分层随机抽样样本方差的计算公式可知缺少平均数的相关数据,故 D 中说法错误. 故选 D.

5. C 【解析】由 $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=3\cos2\alpha$,得 $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=3\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=6\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$. 因为 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,所以 $\frac{\pi}{4}-\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$,则 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\neq0$,故 $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$,即 $1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\frac{1}{3}$,所以 $\sin2\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=-\frac{2}{3}$. 故选 C.

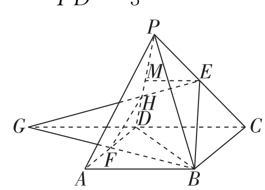
6. C 【解析】因为 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,所以 S_2,S_4-S_2,S_6-S_4 成等比数列,且 $S_4-S_2\neq0$,$S_6-S_4\neq0$,所以 $(S_4-S_2)^2=S_2\cdot(S_6-S_4)$,又因为 $S_6=5S_4-12$,$S_2=3$,所以 $(S_4-3)^2=3(5S_4-12-S_4)$,即 $(S_4-3)(S_4-15)=0$,解得 $S_4=3$ 或 $S_4=15$,因为 $S_4-S_2\neq0$,所以 $S_4=15$. 故选 C.

7. B 【解析】$f(x)=\sqrt3\cos\omega x+\sin\omega x=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$,令 $g(x)=[f(x)]^2-4=0$,得 $f(x)=\pm2$. 因为函数 $g(x)=[f(x)]^2-4$ 在区间 $[0,5\pi]$ 上恰好有 5 个零点,所以函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象在 $[0,5\pi]$ 上恰有 5 条对称轴. 当 $0\leqslant x\leqslant5\pi$ 时,$\frac{\pi}{3}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{3}\leqslant5\omega\pi+\frac{\pi}{3}$,令 $\omega x+\frac{\pi}{3}=t\left(\frac{\pi}{3}\leqslant t\leqslant5\omega\pi+\frac{\pi}{3}\right)$,则 $y=\sin t$ 的图象在 $\left[\frac{\pi}{3},5\omega\pi+\frac{\pi}{3}\right]$ 上恰有 5 条对称轴,作出 $y=\sin t$ 的图象,如图所示,



由图可知需满足 $\frac{9\pi}{2}\leqslant5\omega\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{11\pi}{2}$,解得 $\frac{5}{6}\leqslant\omega<\frac{31}{30}$,即 ω 的取值范围为 $\left[\frac{5}{6},\frac{31}{30}\right)$. 故选 B.

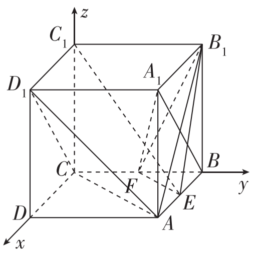
8. B 【解析】如图,记 GE 与 PD 的交点为 H,连接 FH,则平面 BGE 将四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 分成多面体 $PAFBEH$ 和多面体 $FDH\text{-}BCE$ 两部分,显然 $V_1=V_{PAFBEH}$,$V_2=V_{FDH\text{-}BCE}$. 设平行四边形 $ABCD$ 的面积为 S,因为点 F 为 AD 的中点,所以 $S_{\triangle GFD}=\frac{1}{4}S$,$S_{\triangle GBC}=S$. 设 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 h,因为点 E 为 PC 的中点,所以点 E 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{1}{2}h$. 取 PD 的中点 M,连接 EM,则 $EM\parallel CD$,且 $EM=\frac{1}{2}CD$,又 G,D,C 三点共线且 $GD=DC$,所以 $EM\parallel GD$,且 $EM=\frac{1}{2}GD$,所以 $\frac{MH}{HD}=\frac{ME}{GD}=\frac{1}{2}$,所以 $\frac{DH}{PD}=\frac{1}{3}$,所以点 H 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{1}{3}h$,故 $V_2=V_{E\text{-}GBC}-V_{H\text{-}GFD}=\frac{1}{3}S\cdot\frac{1}{2}h-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}S\cdot\frac{1}{3}h=\frac{5}{36}Sh$,$V_1=V_{P\text{-}ABCD}-V_2=\frac{1}{3}Sh-\frac{5}{36}Sh=\frac{7}{36}Sh$,因此 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{5}$. 故选 B.



9. ABD 【解析】直线 l:$mx+y-1-2m=0$ 可化为 $m(x-2)+(y-1)=0$ 由 $\begin{cases}x-2=0,\\y-1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ 则直线 l 过定点 $M(2,1)$,所以 A 正确;当 $r=4$ 时,圆 O 的方程为 $x^2+y^2=16$,可得圆心 $O(0,0)$,则 $|OM|=\sqrt5$,易知当 $OM\perp AB$ 时,线段 AB 的长度最小,其最小值为 $2\sqrt{r^2-|OM|^2}=2\sqrt{11}$,所以 B 正确;因为直线 l 与圆 O 有两个不同的交点,所以点 $M(2,1)$ 在圆 O 内部,所以 $2^2+1^2<r^2$,可得 $0<r<\sqrt5$,所以 C 不正确;当 $r=4$ 时,圆 O 的方程为 $x^2+y^2=16$,则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=16\cos\angle AOB$,当直线 l 过圆心 $O(0,0)$,即 $\angle AOB=\pi$ 时,$\cos\angle AOB$ 取得最小值 -1,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot$

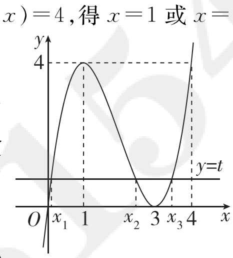
$\overrightarrow{OB}$ 的最小值为-16,所以 D 正确. 故选 ABD.

10. ACD 【解析】以 C 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系,设 $AB=1,AE=BF=a\in(0,1)$,则 $C(0,0,0),A(1,1,0),A_1(1,1,1),C_1(0,0,1),E(1-a,1,0),F(0,1-a,0),D_1(1,0,1)$.



对于 A,由图可知直线 A_1F 与 AD 是异面直线,因为 $AD/\!/BC,AD\not\subset$ 平面 D_1A_1BC, $BC\subset$ 平面 D_1A_1BC,所以 $AD/\!/$平面 D_1A_1BC,所以点 A 到平面 D_1A_1BC 的距离 $d=\frac{1}{2}AB_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则异面直线 A_1F 与 AD 间的距离是定值,故 A 正确;对于 B,$\overrightarrow{A_1F}=(-1,-a,-1)$,$\overrightarrow{CA}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{CD_1}=(1,0,1)$,设平面 ACD_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0,\\ x+z=0,\end{cases}$ 取 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$,若存在点 F 使得 A_1F 和平面 ACD_1 平行,则 $\overrightarrow{A_1F}\perp\boldsymbol{n}$,即$-1+a+1=0$,解得 $a=0$,不符合题意,故 B 错误;对于 C,$\overrightarrow{A_1F}=(-1,-a,-1)$,$\overrightarrow{C_1E}=(1-a,1,-1)$,则 $\overrightarrow{A_1F}\cdot\overrightarrow{C_1E}=-1+a-a+1=0$,所以 $A_1F\perp C_1E$,故 C 正确;对于 D,将三棱锥 B_1-BEF 补成一个长方体,则长方体的体对角线的长等于三棱锥的外接球的直径,则三棱锥的外接球的直径 $2R=\sqrt{BE^2+BF^2+BB_1^2}=\sqrt{(1-a)^2+a^2+1^2}\geqslant\sqrt{\frac{[(1-a)+a]^2}{2}+1^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$,当且仅当 $1-a=a$,即 $a=\frac{1}{2}$ 时取等号,此时三棱锥外接球的体积取得最小值,故 D 正确. 故选 ACD.

11. BCD 【解析】因为 $f(x)=x^3-6x^2+9x$,所以 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$,则由 $f'(x)<0$,得 $1<x<3$,由 $f'(x)>0$,得 $x<1$ 或 $x>3$,所以当 $x<1$ 时,$f(x)$单调递增,当 $1<x<3$ 时,$f(x)$单调递减,当 $x>3$ 时,$f(x)$单调递增,且 $f(1)=1^3-6\times1^2+9\times1=4$,$f(3)=3^3-6\times3^2+9\times3=0$,令 $f(x)=4$,得 $x=1$ 或 $x=4$,又 $f(2+x)=(2+x)^3-6(2+x)^2+9(2+x)$,$f(2-x)=(2-x)^3-6(2-x)^2+9(2-x)$,所以 $f(2+x)+f(2-x)=4$,所以 $f(x)$的图象关于$(2,2)$对称,作出 $f(x)$的大致图象,如图所示. 令 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=t$,$0<t<4$,则由图可知 $0<x_1<1$,$1<x_2<3$,$3<x_3<4$,所以 A 错误;



$f(a)-f(b)=(a^3-b^3)-6(a^2-b^2)+9(a-b)=(a-b)[(a+b-3)^2-ab]$(*),因为 $0<x_1<1$,所以 $1<2-x_1<2$,且 $1<x_2<3$,由(*)式可得 $f(2-x_1)-f(x_1)=(2-2x_1)(x_1-1)^2>0$,所以 $f(2-x_1)>f(x_1)=f(x_2)$,因为 $f(x)$在$(1,3)$上单调递减,所以 $2-x_1<x_2$,所以 $x_1+x_2>2$,所以 B 正确;因为 $x_1+x_2+x_3=6$,所以 $2x_2+x_3=6+x_2-x_1>6$,所以 C 正确;因为 $0<x_1<1,1<x_2<3,3<x_3<4$,所以 $x_1x_2x_3>0$,由 $0<x_1<1,1<x_2<3$,知 $1<x_1+x_2<4$,由 B 知,$x_1+x_2>2$,所以 $2<x_1+x_2<4$,由(*)式知 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)[(x_1+x_2-3)^2-x_1x_2]$,因为 $f(x_1)-f(x_2)=0,x_1-x_2\neq0$,所以$(x_1+x_2-3)^2-x_1x_2=0$,则 $x_1x_2=(x_1+x_2-3)^2\in[0,1)$,当 $x_1+x_2=3$ 时,$x_3=3$,$x_2=3$,$x_1=0$,不符合题意,所以 $x_1x_2\in(0,1)$,又 $3<x_3<4$,所以 $0<x_1x_2x_3<4$,所以 D 正确. 故选 BCD.

12. -10 【解析】$(x-2y)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}(-2y)^r=C_5^r\cdot(-2)^r x^{5-r}y^r$,当 $r=1$ 时,$T_2=C_5^1\cdot(-2)^1x^4y^1=-10x^4y$. 故展开式中 x^4y 的系数为-10.

13. 97 【解析】因为 $S_{n+1}=a_n+S_n+\frac{n}{2}$,所以 $S_{n+1}-S_n=a_n+\frac{n}{2}$,即 $a_{n+1}=a_n+\frac{n}{2}$,所以 $a_2=a_1+\frac{1}{2}$,$a_3=a_2+\frac{2}{2}$,$a_4=a_3+\frac{3}{2}$,…,$a_{20}=a_{19}+\frac{19}{2}$,累加可得 $a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{20}=\left(a_1+\frac{1}{2}\right)+\left(a_2+\frac{2}{2}\right)+\cdots+\left(a_{19}+\frac{19}{2}\right)$,化简可得 $a_{20}=a_1+\frac{1+2+\cdots+19}{2}=2+\frac{19\times(1+19)}{2\times2}=97$.

14. $\sqrt{2}$ 【解析】在 $\triangle AF_1F_2$ 中,由 $\angle AF_1F_2=60^\circ$,得 $\cos\angle AF_1F_2=\frac{|AF_1|^2+|F_1F_2|^2-|AF_2|^2}{2|AF_1|\cdot|F_1F_2|}=\frac{1}{2}$,设$|AF_1|=m$,则$|AF_2|=m+2a$,所以$\frac{m^2+(2c)^2-(m+2a)^2}{2m\cdot2c}=\frac{1}{2}$,解得 $m=\frac{2b^2}{c+2a}$,即$|AF_1|=\frac{2b^2}{c+2a}$. 在$\triangle BF_1F_2$ 中,由 $\angle BF_2F_1=180^\circ-60^\circ=120^\circ$,得 $\cos\angle BF_2F_1=\frac{|BF_2|^2+|F_1F_2|^2-|BF_1|^2}{2|BF_2|\cdot|F_1F_2|}=-\frac{1}{2}$,设$|BF_2|=n$,则$|BF_1|=n+2a$,所以$\frac{n^2+(2c)^2-(n+2a)^2}{2n\cdot2c}=-\frac{1}{2}$,解得 $n=\frac{2b^2}{2a-c}$,即$|BF_2|=\frac{2b^2}{2a-c}$. 因为 $AF_1/\!/PQ/\!/BF_2$,所以$\frac{|PQ|}{|AF_1|}=\frac{|QF_2|}{|F_1F_2|}$,$\frac{|PQ|}{|BF_2|}=\frac{|QF_1|}{|F_1F_2|}$,则$\frac{|PQ|}{|AF_1|}+\frac{|PQ|}{|BF_2|}=\frac{|QF_2|}{|F_1F_2|}+\frac{|QF_1|}{|F_1F_2|}=1$,即$\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_2|}=\frac{1}{|PQ|}$,所以$\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_2|}=\frac{1}{\frac{2b^2}{c+2a}}+\frac{1}{\frac{2b^2}{2a-c}}=\frac{1}{|PQ|}$,解得$|PQ|=\frac{b^2}{2a}$,所以$|OQ|=2|PQ|=2\cdot\frac{b^2}{2a}=\frac{b^2}{a}$,由$\frac{|PQ|}{|AF_1|}=\frac{|QF_2|}{|F_1F_2|}$,得$\frac{\frac{b^2}{2a}}{\frac{2b^2}{c+2a}}=\frac{\frac{b^2}{a}+c}{2c}$,整理得 $c=\sqrt{2}a$,则 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$,故双曲线 C 的离心率是$\sqrt{2}$.

训练 18 函数与导数(A)

1. **解**:(1)函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\frac{x-a}{x^2}$.

①当 $a\leqslant0$ 时,$\because x>0$,$\therefore x-a>0$,$\therefore f'(x)>0$,
$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.
②当 $a>0$ 时,若 $x>a$,则 $f'(x)>0$,$f(x)$在$(a,+\infty)$上单调递增;若 $0<x<a$,则 $f'(x)<0$,$f(x)$在$(0,a)$上单调递减.
综上所述,当 $a\leqslant0$ 时,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;当 $a>0$ 时,$f(x)$在$(a,+\infty)$上单调递增,在$(0,a)$上单调递减.
(2)当 $x\in(0,1]$时,$f(x)\geqslant1$ 等价于 $a\geqslant-x\ln x+x$,不等式 $f(x)\geqslant1$ 在$(0,1]$上恒成立等价于 $a\geqslant(-x\ln x+x)_{\max}$,$x\in(0,1]$.
令 $g(x)=-x\ln x+x$,$x\in(0,1]$,则 $g'(x)=-\ln x\geqslant0$,
$\therefore g(x)$在$(0,1]$上单调递增,$\therefore g(x)_{\max}=g(1)=1$,$\therefore a\geqslant1$,
$\therefore a$ 的取值范围为$[1,+\infty)$.

2. **解**:(1)由 $g(x)=x+a\ln x(x>0)$,得 $g'(x)=1+\frac{a}{x}=\frac{x+a}{x}$,当 $a\geqslant0$ 时,$g'(x)>0$,函数 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.
当 $a<0$ 时,由 $g'(x)>0$,得 $x>-a$,由 $g'(x)<0$,得 $0<x<-a$,故 $g(x)$在$(-a,+\infty)$上单调递增,在$(0,-a)$上单调递减.
综上所述,当 $a\geqslant0$ 时,$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;
当 $a<0$ 时,$g(x)$在$(-a,+\infty)$上单调递增,在$(0,-a)$上单调递减.
(2)$f(x)+2x\geqslant g(x)+x^a$ 等价于 $e^x+x\geqslant a\ln x+x^a$,等价于 $e^x+\ln e^x\geqslant\ln x^a+x^a$. 令 $h(t)=\ln t+t(t>0)$,则 $h(t)$为增函数,$\therefore$ 由 $e^x+\ln e^x\geqslant\ln x^a+x^a$,得 $e^x\geqslant x^a$,得 $x\geqslant\ln x^a=a\ln x$,又 $x>1$,故 $a\leqslant\frac{x}{\ln x}$. 令 $p(x)=\frac{x}{\ln x}(x>1)$,

则 $p'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，当 $1<x<\mathrm{e}$ 时，$p'(x)<0$，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$p'(x)>0$，故 $p(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递减，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增，$\therefore p(x)_{\min}=p(\mathrm{e})=\dfrac{\mathrm{e}}{\ln \mathrm{e}}=\mathrm{e}$，$\therefore a\leqslant \mathrm{e}$，$\therefore a$ 的最大值为 e.

3. **解**：(1)由 $f(x)=x-2\sin x$，得 $f'(x)=1-2\cos x$，当 $x\in(0,\pi)$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{\pi}{3}$，当 $0<x<\dfrac{\pi}{3}$ 时，$f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 单调递减，当 $\dfrac{\pi}{3}<x<\pi$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的极小值为 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$，无极大值.

(2)证明：$g(x)=\ln x-f(x)=\ln x-x+2\sin x$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-1+2\cos x$，令 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}+2\cos x-1$，则 $\varphi'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-2\sin x$. 当 $x\in(0,\pi)$ 时，$\varphi'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-2\sin x<0$，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，因为 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{\pi}>0$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi}-1<0$，所以存在 $x_0\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $\varphi(x_0)=g'(x_0)=0$.

当 x 变化时，$g(x)$，$g'(x)$ 的变化情况如下表：

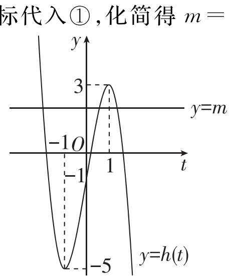
x	$(0,x_0)$	x_0	(x_0,π)
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	单调递增	极大值 $g(x_0)$	单调递减

$g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\ln\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}+\sqrt{3}>0$，则 $g(x_0)>g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)>0$，又 $g(\pi)=\ln\pi-\pi<\ln \mathrm{e}^2-\pi=2-\pi<0$，所以由函数零点存在定理可知，函数 $g(x)$ 在 (x_0,π) 上恰有一个零点. $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\ln\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6}+1$，令 $h(x)=\ln x-x+1$，其中 $0<x<1$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}>0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，则 $h(x)<h(1)=0$，所以 $h\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\ln\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6}+1<0$，即 $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)<0$，又 $g(x_0)>0$，所以由函数零点存在定理可知，函数 $g(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{6},x_0\right)$ 上恰有一个零点. 综上，函数 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有且仅有两个零点.

4. **解**：(1)由题意知 $f'(x)=3x^2+2bx+c$，因为 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处有极值，且曲线 $y=f(x)$ 在 $x=-1$ 处的切线的斜率为 -3，所以 $\begin{cases}f'(-2)=0,\\f'(-1)=-3,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}12-4b+c=0,\\3-2b+c=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=3,\\c=0,\end{cases}$ 故函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x^3+3x^2-1$.

(2)由(1)知 $f'(x)=3x^2+6x$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=-2$. 当 $x\in[-1,0]$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上单调递减；当 $x\in[0,2]$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增. 所以 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的最小值为 $f(0)=-1$. 又 $f(-1)=1$，$f(2)=19$，$f(-1)<f(2)$，所以 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值为 $f(2)=19$.

(3)设切点为 (t,t^3+3t^2-1)，则切线斜率 $k=f'(t)=3t^2+6t$，所以切线方程为 $y-(t^3+3t^2-1)=(3t^2+6t)(x-t)$①. 切线过点 $P(1,m)$，将点 $P(1,m)$ 的坐标代入①，化简得 $m=-2t^3+6t-1$. 令 $h(t)=-2t^3+6t-1$，则 $h'(t)=-6t^2+6$，



令 $h'(t)<0$，得 $t<-1$ 或 $t>1$，令 $h'(t)>0$，得 $-1<t<1$，所以 $h(t)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-1,1)$ 上单调递增. 若过点 $P(1,m)$ 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，则直线 $y=m$ 与曲线 $y=h(t)$ 有三个不同的交点. $h(-1)=-5$，$h(1)=3$，$h(0)=-1$，作出直线 $y=m$ 与曲线 $y=h(t)$，如图所示，由图可知 $-5<m<3$.

训练 19　函数与导数(B)

1. **解**：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x-x+3$，$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	单调递增	2	单调递减

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=2$，无极小值.

(2) $f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}$，$x\in(0,+\infty)$. ①若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；②若 $a>0$，则当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，当 $x\in\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减. 综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$，单调递减区间为 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$.

(3)要使 $f(x)=\ln x-ax+3\leqslant 0$ 恒成立，只需 $f(x)_{\max}\leqslant 0$. 由(2)可知，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不存在最大值；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，$\therefore f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{1}{a}\right)$，

$\therefore f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}-1+3=-\ln a+2\leqslant 0$，解得 $a\geqslant \mathrm{e}^2$，$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $[\mathrm{e}^2,+\infty)$.

2. **解**：(1)由题可知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\mathrm{e}^{x-1}\ln x+\dfrac{\mathrm{e}^{x-1}}{x}=\mathrm{e}^{x-1}\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$，设 $h(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，所以当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)\geqslant h(1)=1$，

所以 $f'(x)=\mathrm{e}^{x-1}\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(2)证明：当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$，即 $\mathrm{e}^{x-1}\ln x\leqslant x^2-x=x(x-1)$，即 $\dfrac{\ln x}{x}\leqslant\dfrac{x-1}{\mathrm{e}^{x-1}}$，故证明 $f(x)\leqslant g(x)$，只需证不等式 $\dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^{\ln x}}\leqslant\dfrac{x-1}{\mathrm{e}^{x-1}}$ 在 $x\in(0,2)$ 时恒成立. 设 $l(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$，则 $l'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$，所以当 $x<1$ 时，$l'(x)>0$，$l(x)$ 单调递增；当 $x>1$ 时，$l'(x)<0$，$l(x)$ 单调递减. 令 $t(x)=\ln x-x+1$，则 $t'(x)=\dfrac{1}{x}-1$，$x>0$，当 $0<x<1$ 时，$t'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$t'(x)<0$，所以 $t(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $x=1$ 时，$t(x)$ 取得最大值 0，所以 $\ln x\leqslant x-1$，且当 $x\in(0,2)$ 时，$\ln x<1$，$x-1<1$，

所以 $l(\ln x)\leqslant l(x-1)$，即 $\dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^{\ln x}}\leqslant\dfrac{x-1}{\mathrm{e}^{x-1}}$，所以当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$ 成立.

3. **解**：(1)函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，$\because f(x)=\ln x-a\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+1(a\in\mathbf{R})$，$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x-a}{x^2}$. 当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x>a$，由 $f'(x)<0$，得 $0<x<a$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增. 综上，

当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；当 $a>0$ 时，$f(x)$在$(0,a)$上单调递减，在$(a,+\infty)$上单调递增.

(2)由 $f(x)>0$，得 $\ln x-a\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+1>0$，即$\dfrac{a(x-1)}{x}<\ln x+1$，根据题意知 $a<\dfrac{x\ln x+x}{x-1}$对任意 $x\in(1,+\infty)$恒成立. 令 $g(x)=\dfrac{x\ln x+x}{x-1}(x>1)$，则 $g'(x)=\dfrac{(\ln x+1+1)(x-1)-(x\ln x+x)}{(x-1)^2}=\dfrac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$，令 $h(x)=x-\ln x-2(x>1)$，则 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}>0$，

$\therefore h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增. $\because h(3)=1-\ln 3<0$，$h(4)=2-\ln 4>0$，$\therefore$ 存在 $x_0\in(3,4)$使得 $h(x_0)=0$，即 $x_0-\ln x_0-2=0$，当 $1<x<x_0$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，$\therefore g(x)$在$(1,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，$\therefore g(x)_{\min}=g(x_0)=\dfrac{x_0(x_0-2)+x_0}{x_0-1}=x_0$，$\therefore a<x_0$. $\because 3<x_0<4$，a 为整数，$\therefore a$ 的最大值是 3.

4. **解**：(1)令 $x+2+a\ln x=2x+2$，得 $a\ln x=x$，当 $x=1$ 时等式不成立，所以 $x\neq1$，所以 $a=\dfrac{x}{\ln x}$.

设 $h(x)=\dfrac{x}{\ln x}(x>0$ 且 $x\neq1)$，则 $h'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，易知函数 $h(x)$在$(0,1)$上单调递减，且此时 $h(x)<0$，
函数 $h(x)$在$(1,\mathrm{e})$上单调递减，在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递增，且 $h(\mathrm{e})=\mathrm{e}$.
根据题意知 $h(x)$的图象与直线 $y=a$ 有唯一的公共点，因为 $a>0$，所以 $a=\mathrm{e}$.

(2)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，因为 $f'(x)=1+\dfrac{a}{x}>0$ 恒成立，所以函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，不妨设 $0<x_1<x_2\leqslant1$，则$|f(x_1)-f(x_2)|<2023\left|\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right|$即为 $f(x_2)-f(x_1)<2023\left(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right)$，即为 $f(x_2)+\dfrac{2023}{x_2}<f(x_1)+\dfrac{2023}{x_1}$，

所以函数 $g(x)=f(x)+\dfrac{2023}{x}$在$(0,1]$上单调递减，所以 $g'(x)=f'(x)-\dfrac{2023}{x^2}=1+\dfrac{a}{x}-\dfrac{2023}{x^2}\leqslant0$ 对任意 $x\in(0,1]$恒成立，即 $a\leqslant\dfrac{2023}{x}-x$ 对任意 $x\in(0,1]$恒成立.

因为 $y=\dfrac{2023}{x}-x$ 在$(0,1]$上单调递减，所以当 $x\in(0,1]$时，$y_{\min}=2022$，所以 $0<a\leqslant2022$，故实数 a 的取值范围是$(0,2022]$.

训练 20　三角函数与解三角形(A)

1. **解**：(1)$f(x)=\dfrac{\sqrt3}{2}\cos 2x+\dfrac{3}{2}\sin 2x-\sin 2x=\dfrac12\sin 2x+\dfrac{\sqrt3}{2}\cos 2x=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\in[-1,1]$，所以 $f(x)$的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，最大值为 1，最小值为-1.

(2)由 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant2x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，可得 $k\pi-\dfrac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$，故函数 $f(x)$的单调递增区间是$\left[k\pi-\dfrac{5\pi}{12},k\pi+\dfrac{\pi}{12}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$. 由 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leqslant2x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，可得 $k\pi+\dfrac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{7\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$，故函数 $f(x)$的单调递减区间是$\left[k\pi+\dfrac{\pi}{12},k\pi+\dfrac{7\pi}{12}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

2. **解**：(1)$f(\theta)=\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\theta\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\sin(\pi+\theta)\cdot\dfrac{\cos(2\pi-\theta)}{(1-\cos 2\theta)^2}=\dfrac{-\cos\theta\sin\theta(-\sin\theta)\cos\theta}{(2\sin^2\theta)^2}=\dfrac{\cos\theta\sin\theta\sin\theta\cos\theta}{4\sin^4\theta}$，因为 $\theta\neq\dfrac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\sin\theta\neq0$，$\cos\theta\neq0$，所以 $f(\theta)=\dfrac{\cos\theta\cos\theta}{4\sin^2\theta}=\dfrac{1}{4\tan^2\theta}$.

(2)由 $\tan\theta=\dfrac12$，得 $\tan\left(\theta-\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\theta-\tan\dfrac{3\pi}{4}}{1+\tan\theta\tan\dfrac{3\pi}{4}}=\dfrac{\dfrac12-(-1)}{1+\dfrac12\times(-1)}=3$，所以 $f\left(\theta-\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4\tan^2\left(\theta-\dfrac{3\pi}{4}\right)}=\dfrac{1}{4\times3^2}=\dfrac{1}{36}$.

3. **解**：(1)由正弦定理及$\dfrac{c-b}{a+b}=\dfrac{\sin A}{\sin B+\sin C}$，得$\dfrac{c-b}{a+b}=\dfrac{a}{b+c}$，即 $a^2+b^2-c^2=-ab$，$\therefore\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac12$，$\because 0<C<\pi$，$\therefore C=\dfrac{2\pi}{3}$.

(2)$\because c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2+ab\geqslant(a+b)^2-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，$\therefore\dfrac34(a+b)^2\leqslant3$，即 $a+b\leqslant2$，$\therefore\triangle ABC$ 周长的最大值为 $2+\sqrt3$.

4. **解**：(1)$\because\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{4}<-\dfrac{\beta}{2}<0$，$\therefore\dfrac{\pi}{4}<\alpha-\dfrac{\beta}{2}<\pi$，$-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\alpha}{2}-\beta<\dfrac{\pi}{2}$，又 $f\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)=-\dfrac19<0$，$f\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)=\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)=\dfrac23>0$，$\therefore\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\dfrac{\beta}{2}<\pi$，$0<\dfrac{\alpha}{2}-\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore\sin\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)}=\dfrac{4\sqrt5}{9}$，$\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)}=\dfrac{\sqrt5}{3}$，$\therefore\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\cos\left[\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)-\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)\right]=\cos\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)+\sin\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)=\left(-\dfrac19\right)\times\dfrac{\sqrt5}{3}+\dfrac{4\sqrt5}{9}\times\dfrac23=\dfrac{7\sqrt5}{27}$.

(2)$g(x)=\sqrt2 f\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-f(2x)=\sqrt2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin 2x=\sin x+\cos x-2\sin x\cos x$，令 $t=\sin x+\cos x=\sqrt2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，则 $t\in[-\sqrt2,\sqrt2]$，则 $g(x)$可转化为 $h(t)=-t^2+t+1=-\left(t-\dfrac12\right)^2+\dfrac54(t\in[-\sqrt2,\sqrt2])$，易知 $h(t)_{\min}=h(-\sqrt2)=-\sqrt2-1$，$h(t)_{\max}=h\left(\dfrac12\right)=\dfrac54$，

$\therefore h(t)\in\left[-\sqrt2-1,\dfrac54\right]$，$\therefore g(x)$的值域为$\left[-\sqrt2-1,\dfrac54\right]$.

训练 21　三角函数与解三角形(B)

1. **解**：(1)由 $ac\sin A+4\sin C=4c\sin A$ 及正弦定理得 $a^2c+4c=4ac$，
$\because c\neq0$，$\therefore a^2+4=4a$，$\therefore(a-2)^2=0$，解得 $a=2$.
由 $\sin\dfrac{A}{2}+\cos A=1$，且 $0<A<\pi$，得$\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}=1-\cos A$，即 $2\cos^2A-3\cos A+1=0$，
解得 $\cos A=\dfrac12$或 $\cos A=1$，又 $0<A<\pi$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$.

(2)由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，
即 $4=b^2+c^2-bc$，$\because b^2+c^2-bc\geqslant bc$，$\therefore bc\leqslant 4$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{1}{2}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，
当且仅当 $b=c=2$ 时等号成立，
故△ABC 的面积的最大值为$\sqrt{3}$，
取得最大值时△ABC 为等边三角形.

2. **解**：(1)由$(2a-c)\cos B=b\cos C$ 及正弦定理得$(2\sin A-\sin C)\cos B=\sin B\cos C$，即 $2\sin A\cos B=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin(B+C)=\sin A$，$\because\sin A\neq0$，$\therefore\cos B=\frac{1}{2}$，

又 $B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知，$B=\frac{\pi}{3}$，$\because AB=AC$，$\therefore$△ABC 为等边三角形.
在△ACD 中，由余弦定理得 $AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos D=16+4-2\times4\times2\cos D=20-16\cos D$，$\because S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot CD\sin D=\frac{1}{2}\times4\times2\sin D=4\sin D$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B=\frac{1}{2}AC^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}=5\sqrt{3}-4\sqrt{3}\cos D$，$\therefore$四边形 $ABCD$ 的面积$S=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABC}=5\sqrt{3}-4\sqrt{3}\cos D+4\sin D=5\sqrt{3}+8\sin\left(D-\frac{\pi}{3}\right)$，又 $D\in(0,\pi)$，$\therefore D-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，$\therefore$当 $D-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $D=\frac{5\pi}{6}$时，S 取得最大值，故四边形 $ABCD$ 的面积的最大值为 $5\sqrt{3}+8$.

3. **解**：(1)由题得 $f(x)=\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$，令 $2k\pi-\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $k\pi-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi-\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore$函数 $f(x)$ 的单调递增区间为$\left[-\frac{2\pi}{3}+k\pi,-\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2)$\because f(A)=0$，$\therefore\cos\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}=0$，$\therefore\cos\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$，又 $0<A<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\frac{\pi}{3}<2A+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$，$\therefore 2A+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore A=\frac{\pi}{6}$.

由正弦定理得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2$，$\therefore b=2\sin B$，$c=2\sin C$，$\therefore c-\sqrt{3}b=2\sin C-2\sqrt{3}\sin B=2\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}\sin B=\cos B-\sqrt{3}\sin B=2\cos\left(B+\frac{\pi}{3}\right)$. $\because$三角形 ABC 是锐角三角形，$\therefore\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\0<C=\frac{5\pi}{6}-B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得$\frac{\pi}{3}<B<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\frac{2\pi}{3}<B+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{6}$，$\therefore-\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos\left(B+\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{1}{2}$，

$\therefore-\sqrt{3}<2\cos\left(B+\frac{\pi}{3}\right)<-1$. 故 $c-\sqrt{3}b$ 的取值范围为$(-\sqrt{3},-1)$.

4. **解**：(1)选条件①：因为$(\sin B+\sin C)^2=\sin^2A+3\sin B\sin C$，所以 $\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=\sin B\sin C$，由正弦定理得 $b^2+c^2-a^2=bc$，由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，又 A 是△ABC 的内角，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

选条件②：由 $c=a\cos B+\frac{1}{2}b$ 及余弦定理得 $c=a\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{1}{2}b$，整理得 $b^2+c^2-a^2=bc$，由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，又 A 是△ABC 的内角，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

选条件③：由 $b\cos C+c\cos B-2a\cos A=0$ 及正弦定理得 $\sin B\cos C+\sin C\cos B-2\sin A\cos A=0$，即 $\sin(B+C)=2\sin A\cos A$，即 $\sin A=2\sin A\cos A$，因为 $\sin A\neq0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，又 A 是△ABC 的内角，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为 $A=\frac{\pi}{3}$，△ABC 为锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\0<\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$. 由正弦定理得$\frac{c}{\sin C}=\frac{2}{\sin B}$，所以 $c=\frac{2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)}{\sin B}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}\cos B+\sin B}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\tan B}+1$. 由$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，可得 $\tan B>\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $0<\frac{1}{\tan B}<\sqrt{3}$，所以 $1<c<4$. 故 c 的取值范围为$(1,4)$.

训练 22 数列(A)

1. **解**：(1)因为 a_1，$5a_3$，$9a_5$ 成等差数列，所以 $a_1+9a_5=10a_3$，即 $a_1+9a_1q^4=10a_1q^2$，即 $9q^4-10q^2+1=0$，解得 $q^2=\frac{1}{9}$或 $q^2=1$. 因为 $q>0$，$q\neq1$，所以 $q=\frac{1}{3}$，所以 $a_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(2)因为 $b_n=\log_3\frac{1}{a_n}=n$，所以$\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，所以 $T_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

2. **解**：(1)由题知 a_1，a_6，a_{16} 成等比数列，故 $a_1a_{16}=a_6^2$，即 $a_1(a_1+15d)=(a_1+5d)^2$，
即 $25d^2=5a_1d$，又 $d\neq0$，所以 $a_1=5d$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=(n+4)d$，故公比 $q=\frac{a_6}{a_1}=2$.

(2)在等差数列$\{a_n\}$中，$a_{k_n}=a_1+(k_n-1)d=(k_n+4)d$，
在等比数列$\{a_{k_n}\}$中，$a_{k_n}=a_{k_1}\cdot2^{n-1}=a_1\cdot2^{n-1}=5d\cdot2^{n-1}$，
故$(k_n+4)d=5d\cdot2^{n-1}$，即 $k_n=5\cdot2^{n-1}-4$，
则 $S_n=k_1+k_2+\cdots+k_n=5\times(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})-4n=5\cdot2^n-4n-5$.

3. **解**：(1)由题意，设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，则当 $q=1$ 时，$S_{n+1}+2S_{n-1}=(n+1)a_1+2(n-1)a_1=3n-1(n\geqslant2)$，
$3S_n=3na_1=3n$，$\therefore S_{n+1}+2S_{n-1}\neq3S_n(n\geqslant2)$，即 $q=1$ 不符合题意，故 $q\neq1$.

当 $q\neq1$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1-q^n}{1-q}$，

$S_{n+1}=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$，$S_{n-1}=\frac{1-q^{n-1}}{1-q}(n\geqslant2)$，$\because$当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n+1}+2S_{n-1}=3S_n$，$\therefore\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+2\times\frac{1-q^{n-1}}{1-q}=3\times\frac{1-q^n}{1-q}$，即 $1-q^{n+1}+2(1-q^{n-1})=3(1-q^n)$，
化简得 $q^{n-1}(q-2)(q-1)=0$，$\because q\neq1$ 且 $q\neq0$，$\therefore q=2$，
$\therefore a_n=1\cdot2^{n-1}=2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)由(1)知，$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}$，$S_{n+1}=\frac{1-2^{n+1}}{1-2}$，则 $b_n=\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=$

$\dfrac{2^n}{\frac{1-2^n}{1-2}\cdot\frac{1-2^{n+1}}{1-2}}=\dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$,

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{1}{2^1-1}-\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{2^2-1}-\dfrac{1}{2^3-1}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$.

4. **解**:(1)数列$\{a_n\}$满足 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$①,当 $n\geqslant 2$ 时,$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=(n-2)\cdot 2^n+2$②,①-②得 $na_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2-(n-2)\cdot 2^n-2=n\cdot 2^n(n\geqslant 2)$,所以 $a_n=2^n(n\geqslant 2)$,
当 $n=1$ 时,$a_1=2$ 满足上式,所以 $a_n=2^n$.
(2)由(1)得 $b_n=\dfrac{2n+1}{2^n}$,则 $S_n=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{2^n}$③,
$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$④,③-④得$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2}+2\times\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)-\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}=\dfrac{5}{2}-\dfrac{5+2n}{2^{n+1}}$,所以 $S_n=5-\dfrac{5+2n}{2^n}$.

训练 23　数列(B)

1. **解**:(1)因为 $a_{n+1}=2a_n-1$,所以 $a_{n+1}-1=2(a_n-1)$,
又因为 $a_1-1=3-1=2\neq 0$,所以$\dfrac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=2$,
所以数列$\{a_n-1\}$是以 2 为首项,2 为公比的等比数列,
则 $a_n-1=2\times 2^{n-1}$,即 $a_n=2^n+1$.
(2)由 $b_n=\log_2(a_n-1)$,得 $b_n=\log_2 2^n=n$,因为 $b_{50}=50$,$a_5=33$,$a_6=65$,$b_{55}=55$,所以 $S_{50}=(b_1+b_2+\cdots+b_{55})-(a_1+a_2+\cdots+a_5)=\dfrac{55\times(1+55)}{2}-(3+5+9+17+33)=1473$.

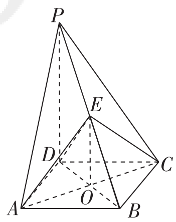
2. **解**:(1)$\because a_n^2+2a_n-n=2S_n$,$\therefore$当 $n\geqslant 2$ 时,$a_{n-1}^2+2a_{n-1}-(n-1)=2S_{n-1}$,两式相减得 $a_n^2+2a_n-a_{n-1}^2-2a_{n-1}-1=2a_n$,整理得 $a_n^2=(a_{n-1}+1)^2$,$\because a_n>0$,$\therefore a_n=a_{n-1}+1(n\geqslant 2)$,当 $n=1$ 时,$a_1^2+2a_1-1=2a_1$,$\therefore a_1=-1$(舍)或 $a_1=1$,
$\therefore\{a_n\}$是以 1 为首项,1 为公差的等差数列,则 $a_n=n$.
(2)证明:由(1)知,$b_n=3^n-1$,$c_n=\dfrac{3^n}{(3^n-1)\cdot(3^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3^n-1}-\dfrac{1}{3^{n+1}-1}\right)$,$\therefore c_1+c_2+\cdots+c_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3^1-1}-\dfrac{1}{3^2-1}+\dfrac{1}{3^2-1}-\dfrac{1}{3^3-1}+\cdots+\dfrac{1}{3^n-1}-\dfrac{1}{3^{n+1}-1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3^{n+1}-1}\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2(3^{n+1}-1)}$,$\because\dfrac{1}{2(3^{n+1}-1)}>0$,$\therefore\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2(3^{n+1}-1)}<\dfrac{1}{4}$,即 $c_1+c_2+\cdots+c_n<\dfrac{1}{4}$.

3. **解**:(1)当 $n\geqslant 2$ 时,因为 $S_{n+2}+S_n=2S_{n+1}+1$,所以 $S_{n+2}-S_{n+1}=S_{n+1}-S_n+1$,得 $a_{n+2}=a_{n+1}+1$,
又因为 $a_3=a_2+1=3$,所以当 $n\geqslant 2$ 时,数列$\{a_n\}$是首项为 2,公差为 1 的等差数列,所以 $a_n=\begin{cases}2,n=1,\\ n,n\geqslant 2.\end{cases}$
因为数列$\{b_n\}$是各项均为正数的等比数列,所以$\{b_n\}$的公比 $q>0$,首项 $b_1>0$,因为 $b_4=16$,$b_3=b_1b_2$,所以$\begin{cases}b_1q^3=16,\\ b_1q^2=b_1\cdot b_1q,\\ q>0,b_1>0,\end{cases}$解得 $b_1=q=2$,所以 $b_n=b_1q^{n-1}=2\times 2^{n-1}=2^n$.
综上,数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式分别为 $a_n=\begin{cases}2,n=1,\\ n,n\geqslant 2,\end{cases}$ $b_n=2^n$.
(2)数列$\{a_n\}$的前 1000 项为 2,2,3,4,5,…,1000,数列$\{b_n\}$的项为 $2,2^2,2^3,2^4,\cdots,2^n$,令 $2^n<1000$,可得 $n\leqslant 9$,所以数列$\{c_n\}$的前 1000 项包含数列$\{a_n\}$的项 2,2,3,4,5,…,991,共 991 项,包含数列$\{b_n\}$的项 $2,2^2,2^3,2^4,2^5,2^6,2^7,2^8,2^9$,共 9 项.所以 $T_{1000}=2+(2+3+4+\cdots+991)+(2+2^2+2^3+\cdots+2^9)=1+\dfrac{991\times(1+991)}{2}+\dfrac{2-2^9\times 2}{1-2}=492\ 559$.

4. **解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,因为 $a_1=1$,a_4 是 a_2 和 a_8 的等比中项,所以 $a_4^2=a_2\cdot a_8$,即$(1+3d)^2=(1+d)(1+7d)$,解得 $d=1$ 或 $d=0$,
又因为 $d\neq 0$,所以 $d=1$,所以 $a_n=1+(n-1)\times 1=n$.
因为 $3b_n-2S_n=2(n\in\mathbf{N}^*)$,所以当 $n\geqslant 2$ 时,$3b_{n-1}-2S_{n-1}=2$,所以 $3(b_n-b_{n-1})-2(S_n-S_{n-1})=0$,所以 $3(b_n-b_{n-1})-2b_n=0$,即$\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=3(n\geqslant 2)$.当 $n=1$ 时,$3b_1-2S_1=2$,又因为 $S_1=b_1$,所以 $b_1=2$,所以数列$\{b_n\}$是以 2 为首项,3 为公比的等比数列,所以 $b_n=b_1\cdot q^{n-1}=2\times 3^{n-1}$.
(2)由(1)得 $c_n=\begin{cases}n+2,n\text{ 为奇数},\\ 2\times 3^{n-1},n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 所以数列$\{c_n\}$的前 $2n+1$ 项和为 $T_{2n+1}=(3+5+7+\cdots+2n+3)+2(3^1+3^3+3^5+\cdots+3^{2n-1})=\dfrac{(n+1)(3+2n+3)}{2}+\dfrac{6(1-9^n)}{1-9}=n^2+4n+\dfrac{9}{4}+\dfrac{3^{2n+1}}{4}$.

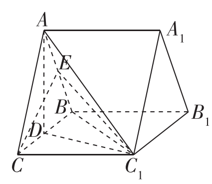
训练 24　立体几何(A)

1. **解**:(1)证明:连接 BD,交 AC 于点 O,连接 OE,如图所示.



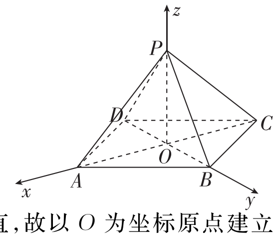
$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形,$\therefore O$ 为 BD 的中点,又 E 为 PB 的中点,
$\therefore OE/\!/PD$.$\because PD\not\subset$平面 AEC,$OE\subset$平面 AEC,$\therefore PD/\!/$平面 AEC.
(2)$\because AB=2$,$PD=\sqrt{2}AB$,$\therefore PD=2\sqrt{2}$,又$\because PD\perp$底面 $ABCD$,
$\therefore V_{\text{三棱锥}P\text{-}ABD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABD}\cdot PD=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2^2\times 2\sqrt{2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.$\because E$ 是 PB 的中点,$\therefore V_{\text{三棱锥}E\text{-}PAD}=\dfrac{1}{2}V_{\text{三棱锥}B\text{-}PAD}=\dfrac{1}{2}V_{\text{三棱锥}P\text{-}ABD}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. **解**:(1)证明:$\because\triangle ABC$ 为正三角形,D 为 BC 的中点,
$\therefore AD\perp BC$.$\because BB_1\perp$平面 ABC,$AD\subset$平面 ABC,$\therefore BB_1\perp AD$.$\because BB_1\cap BC=B$,BB_1,$BC\subset$平面 BCC_1B_1,$\therefore AD\perp$平面 BCC_1B_1,又$\because AD\subset$平面 ADC_1,$\therefore$平面 $ADC_1\perp$平面 BCC_1B_1.
(2)取 BA 的中点 E,连接 CE,C_1E,如图所示.$\because\triangle ABC$ 为正三角形,$\therefore CE\perp AB$.
$\because BB_1\perp$平面 ABC,$BB_1/\!/CC_1$,$\therefore CC_1\perp$平面 ABC,$\therefore CC_1\perp AB$,又 $CE\cap CC_1=C$,$\therefore AB\perp$平面 CC_1E,$\therefore AB\perp C_1E$,
$\therefore\angle CEC_1$ 为二面角 C-AB-C_1 的平面角.



$\because$侧面 ABB_1A_1 是边长为 2 的正方形,
$\therefore CC_1=BB_1=2$,
$\because\triangle ABC$ 为正三角形,$\therefore CE=\sqrt{3}$,
$\therefore C_1E=\sqrt{7}$,
$\therefore\cos\angle CEC_1=\dfrac{CE}{C_1E}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$,
$\therefore$二面角 C-AB-C_1 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

3. **解**:(1)证明:连接 PO,在正四棱锥 P-$ABCD$ 中,$PO\perp$底面 $ABCD$,$\because BO\subset$平面 $ABCD$,
$\therefore PO\perp BO$.
在正方形 $ABCD$ 中,$BO\perp AC$,
$\because PO\cap AC=O$,PO,$AC\subset$平面 PAC,$\therefore BO\perp$平面 PAC.

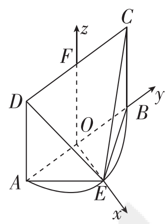


(2)由(1)知 PO,AO,BO 两两垂直,故以 O 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系,
在正方形 $ABCD$ 中,$\because AB=2\sqrt{2}$,$\therefore AO=BO=2$,$\because PB=2\sqrt{2}$,$\therefore PO=2$,$\therefore P(0,0,2)$,$C(-2,0,0)$,$B(0,2,0)$,
$\therefore\overrightarrow{PC}=(-2,0,-2)$,$\overrightarrow{CB}=(2,2,0)$.由(1)知 $BO\perp$平面 PAC,$\therefore$平面 PAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OB}=(0,2,0)$.

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=-2x-2z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}=2x+2y=0,\end{cases}$ 取 $x=-1$，得 $\boldsymbol{m}=(-1,1,1)$.

设平面 PAC 与平面 PBC 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，∴平面 PAC 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

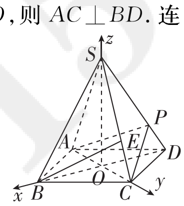
4. 解：(1)证明：∵四边形 $ABCD$ 为矩形，∴$AB/\!/CD$，
∵$AB\subset$平面 ABE，$CD\not\subset$平面 ABE，∴$CD/\!/$平面 ABE.
又 $CD\subset$平面 CDE，平面 $ABE\cap$平面 $CDE=l$，∴$l/\!/CD$，
∵$CD\subset$平面 $ABCD$，$l\not\subset$平面 $ABCD$，∴$l/\!/$平面 $ABCD$.
(2)取 AB，CD 的中点分别为 O，F，连接 OE，OF，则 $OF\perp AB$，
又平面 $ABCD\perp$平面 ABE，平面 $ABCD\cap$平面 $ABE=AB$，$OF\subset$平面 $ABCD$，∴$OF\perp$平面 ABE.
∵$OE\subset$平面 ABE，∴$OF\perp OE$. 易知 $E\in l$，∴当 l 与半圆弧 AB 相切时，$OE\perp l$，∵$l/\!/CD/\!/AB$，∴$OE\perp AB$.
以 O 为坐标原点，OE，OB，OF 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，
不妨设 $BC=1$，易得 $A(0,-2,0)$，$C(0,2,1)$，$D(0,-2,1)$，$E(2,0,0)$，
则 $\overrightarrow{DE}=(2,2,-1)$，$\overrightarrow{AD}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{DC}=(0,4,0)$. 设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$为平面 ADE 的法向量，
则 $\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}z_1=0,\\ 2x_1+2y_1-z_1=0,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}z_1=0,\\ x_1=-y_1,\end{cases}$ 令 $x_1=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,-1,0)$.
设 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$为平面 CDE 的法向量，



则 $\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$
即 $\begin{cases}4y_2=0,\\ 2x_2+2y_2-z_2=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y_2=0,\\ 2x_2=z_2,\end{cases}$
令 $x_2=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$.
∵$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，
∴平面 ADE 与平面 CDE 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

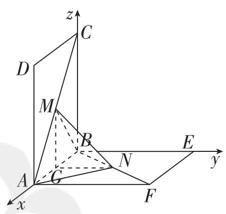
训练 25　立体几何(B)

1. 解：(1)证明：连接 BD，设 AC 交 BD 于点 O，则 $AC\perp BD$. 连接 SO，由题意知 $SO\perp$平面 $ABCD$. 以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OS}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系，如图所示.



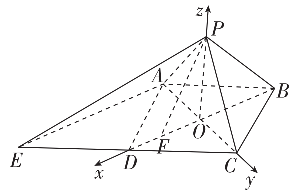
设底面 $ABCD$ 的边长为 $a(a>0)$，则 $SO=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$，于是 $S\left(0,0,\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\right)$，$D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，$B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，$C\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，所以 $\overrightarrow{OC}=\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$\overrightarrow{SD}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,-\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\right)$. 因为 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{SD}=0$，所以 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{SD}$，即 $OC\perp SD$，所以 $AC\perp SD$.
(2)假设在棱 SC 上存在一点 E，使 $BE/\!/$平面 PAC.
因为 $AC\perp SD$，$CP\perp SD$，$AC\cap CP=C$，所以 $SD\perp$平面 PAC，所以 $\overrightarrow{DS}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\right)$是平面 PAC 的一个法向量.
$\overrightarrow{CS}=\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，
设 $\overrightarrow{CE}=t\overrightarrow{CS}(0<t\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+t\overrightarrow{CS}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a(1-t),\dfrac{\sqrt{6}}{2}at\right)$. 因为 $BE/\!/$平面 PAC，所以 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DS}=0$，得 $t=\dfrac{1}{3}$，此时$\dfrac{SE}{EC}=2$，
故棱 SC 上存在一点 E，使 $BE/\!/$平面 PAC，且$\dfrac{SE}{EC}=2$.

2. 解：(1)证明：∵平面 $ABCD\perp$平面 $ABEF$，平面 $ABCD\cap$平面 $ABEF=AB$，$BC\perp AB$，$BC\subset$平面 $ABCD$，∴$BC\perp$平面 $ABEF$，又∵$MG\perp$平面 $ABEF$，∴$MG/\!/BC$，∴$\dfrac{AG}{AB}=\dfrac{AM}{AC}$.
∵$\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{FN}{FB}$，∴$\dfrac{AG}{AB}=\dfrac{FN}{FB}$，∴$AF/\!/GN$，又∵$AF\not\subset$平面 MNG，$GN\subset$平面 MNG，∴$AF/\!/$平面 MNG.
(2)依题意得 $MG=AG=\lambda$，$GN=BG=1-\lambda$，$V_{A\text{-}BMN}=V_{M\text{-}ABN}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}AB\cdot GN\cdot MG=\dfrac{1}{6}\lambda(1-\lambda)=\dfrac{1}{6}(-\lambda^2+\lambda)$.
∴当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$时，三棱锥 $A\text{-}BMN$ 的体积最大，此时，M，N，G 分别为线段 AC，BF，AB 的中点. 以 B 为坐标原点，分别以 BA，BE，BC 所在的直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(1,0,0)$，$B(0,0,0)$，$M\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$，$N\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$，所以 $\overrightarrow{AM}=\left(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{MN}=\left(0,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$. 设平面 AMN 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AM}=-\dfrac{x_1}{2}+\dfrac{z_1}{2}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MN}=\dfrac{y_1}{2}-\dfrac{z_1}{2}=0,\end{cases}$ 取 $z_1=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$. 设平面 BMN 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，因为 $\overrightarrow{BM}=\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{MN}=\left(0,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，
∴$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=\dfrac{x_2}{2}+\dfrac{z_2}{2}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=\dfrac{y_2}{2}-\dfrac{z_2}{2}=0,\end{cases}$ 取 $z_2=1$，得 $\boldsymbol{n}=(-1,1,1)$.
∵$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{1}{3}$，∴平面 AMN 与平面 BMN 的夹角的余弦值为$\dfrac{1}{3}$.

3. 解：(1)证明：连接 OP，由题意可知，$OA=OB=OC$，$PC=PA$，
∴$PO\perp AC$，∵$\triangle POB\cong\triangle POC$，∴$\angle POB=\angle POC=90^\circ$，
∴$PO\perp BD$.
∵$BD\cap AC=O$，BD，$AC\subset$平面 $ABCD$，∴$PO\perp$平面 $ABCD$，
∵$AE\subset$平面 $ABCD$，∴$PO\perp AE$. ∵$AD\perp CD$，$AD=DE=CD$，∴$\angle EAD=\angle CAD=45^\circ$，∴$\angle EAC=90^\circ$，即 $AE\perp AC$.
∵$PO\cap AC=O$，PO，$AC\subset$平面 PAC，∴$AE\perp$平面 PAC.
(2)由(1)可知，PO，OC，OD 两两垂直，故以 O 为坐标原点，OD，OC，OP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，易知 $OD=OC=PO=2$，则 $A(0,-2,0)$，$B(-2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，$E(4,-2,0)$，



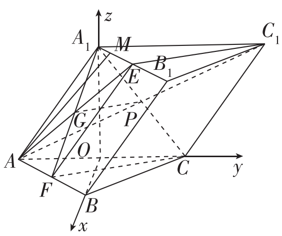
∵点 F 是线段 BD 上一动点，∴可设 $F(a,0,0)(-2\leqslant a\leqslant2)$，则 $\overrightarrow{AE}=(4,0,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{PF}=(a,0,-2)$.
设平面 PAE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}4x=0,\\ 2y+2z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，得 $x=0$，$z=-1$，则 $\boldsymbol{m}=(0,1,-1)$.
$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{PF}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PF}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{PF}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{a^2+4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+4}}$，∵$-2\leqslant a\leqslant2$，∴$2\leqslant\sqrt{a^2+4}\leqslant2\sqrt{2}$，即 $\sin\theta$ 的取值范围是$\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

4. **解**:(1)证明:因为斜三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的侧面均为平行四边形,所以 P 是 A_1C 的中点.连接 EF,因为 E,F 分别是棱 A_1B_1,AB 的中点,所以 $A_1E=AF$,又 $A_1E/\!/AF$,所以四边形 $AFEA_1$ 为平行四边形,则 G 为 A_1F 的中点,则在三角形 A_1FC 中,$PG/\!/FC$.

连接 EC_1,易证 $CF/\!/EC_1$,所以 $PG/\!/EC_1$,又 $PG\not\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$,$EC_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$,所以 $PG/\!/$平面 $A_1B_1C_1$.

(2)连接 OB,因为点 A_1 在底面 ABC 上的射影为 AC 的中点 O,所以 $A_1O\perp$平面 ABC,又因为三角形 ABC 为正三角形,O 为 AC 的中点,

所以 $AC\perp BO$.以 O 为坐标原点,OB,OC,OA_1 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立空间直角坐标系,如图所示.



因为 $AB=6$,$AA_1=5$,所以 $AO=3$,$A_1O=4$,所以 $O(0,0,0)$,$A(0,-3,0)$,$B(3\sqrt{3},0,0)$,$C(0,3,0)$,$A_1(0,0,4)$,$F\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$,$B_1(3\sqrt{3},3,4)$,所以 $\overrightarrow{A_1C}=(0,3,-4)$,$\overrightarrow{A_1F}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},-4\right)$,设 $\overrightarrow{A_1M}=\lambda\overrightarrow{A_1B_1}\ (0\leqslant\lambda\leqslant1)$,则 $M(3\sqrt{3}\lambda,3\lambda,4)$,所以 $\overrightarrow{AM}=(3\sqrt{3}\lambda,3\lambda+3,4)$.设平面 A_1FC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1F}=0,\end{cases}$即 $\begin{cases}3y-4z=0,\\ 3\sqrt{3}x-3y-8z=0,\end{cases}$即 $\begin{cases}3y=4z,\\ \sqrt{3}x=4z,\end{cases}$令 $z=3$,得 $x=4\sqrt{3}$,$y=4$,则 $\boldsymbol{n}=(4\sqrt{3},4,3)$.

设 AM 与平面 A_1FC 所成的角为 α,则 $\sin\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{AM},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AM}||\boldsymbol{n}|}=\frac{(3\sqrt{3}\lambda,3\lambda+3,4)\cdot(4\sqrt{3},4,3)}{\sqrt{36\lambda^2+18\lambda+25}\times\sqrt{73}}=\frac{|48\lambda+24|}{\sqrt{36\lambda^2+18\lambda+25}\times\sqrt{73}}$,

令 $\frac{|48\lambda+24|}{\sqrt{36\lambda^2+18\lambda+25}\times\sqrt{73}}=\frac{32}{\sqrt{2117}}=\frac{32}{\sqrt{73\times29}}$,得 $\frac{6\lambda+3}{\sqrt{36\lambda^2+18\lambda+25}}=\frac{4}{\sqrt{29}}$,整理得 $468\lambda^2+756\lambda-139=0$,结合 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 可得 $\lambda=\frac{1}{6}$.故当 $\overrightarrow{A_1M}=\frac{1}{6}\overrightarrow{A_1B_1}$,即点 M 为 A_1B_1 上靠近点 A_1 的第一个六等分点时,符合题意.

训练 26 解析几何(A)

1. **解**:(1)直线 $2x-y+2=0$ 与 y 轴的交点坐标为 $(0,2)$,则 $F(0,2)$,所以抛物线 C 的方程为 $x^2=8y$.

(2)由 $\begin{cases}y=2x+2,\\ x^2=2py,\end{cases}$得 $x^2-4px-4p=0$,则 $\Delta=16p^2+16p>0$.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=4p$ ①,$x_1x_2=-4p$ ②,所以 $Q(2p,2p)$.因为 $QA\perp QB$,所以 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=0$,

即 $(x_1-2p)(x_2-2p)+(y_1-2p)(y_2-2p)=0$,

即 $(x_1-2p)(x_2-2p)+(2x_1+2-2p)(2x_2+2-2p)=0$,整理得 $5x_1x_2+(4-6p)(x_1+x_2)+8p^2-8p+4=0$,

将①②代入上式得 $4p^2+3p-1=0$,解得 $p=\frac{1}{4}$ 或 $p=-1$(舍去),所以 $p=\frac{1}{4}$.

2. **解**:(1)由 $|FB|=2$,得 $a=2$,又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $c=\sqrt{3}$,所以 $b^2=a^2-c^2=1$,故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)方法一:由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=x-1,\end{cases}$消去 y 整理得 $5x^2-8x=0$,解得 $x=0$ 或 $x=\frac{8}{5}$,

则可设 $P(0,-1)$,$Q\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$,所以 $|PQ|=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}+1\right)^2}=\frac{8\sqrt{2}}{5}$,

可得原点 O 到直线 $y=x-1$ 的距离 $d=\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{2}}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4}{5}$.

方法二:由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=x-1,\end{cases}$消去 x 整理得 $5y^2+2y-3=0$,设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=-\frac{2}{5}$,$y_1\cdot y_2=-\frac{3}{5}$,所以 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}\times1\times|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{4}{5}$.

3. **解**:(1)由题意得抛物线的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$,因为抛物线上的点到焦点的距离等于其到准线的距离,所以 $2+\frac{p}{2}=3$,解得 $p=2$,所以抛物线的方程为 $y^2=4x$.

(2)证明:设直线 l 的方程为 $x=my+t$,$t>0$,由 $\begin{cases}x=my+t,\\ y^2=4x,\end{cases}$消去 x 整理得 $y^2-4my-4t=0$,则 $\Delta>0$,$y_1y_2=-4t$,$x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{16}=t^2$,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=t^2-4t=12$,可得 $t=6$,所以直线 l 的方程为 $x=my+6$,所以直线 l 过定点 $(6,0)$.

4. **解**:(1)将点 A 的坐标代入双曲线 C 的方程得 $\frac{4}{a^2}-\frac{1}{a^2-1}=1$,可得 $a^2=2$,故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

由题知,直线 l 的斜率存在,设直线 l 的方程为 $y=kx+m$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,联立直线 l 与双曲线 C 的方程,可得 $(2k^2-1)x^2+4kmx+2m^2+2=0$,

则 $\Delta=8(m^2+1-2k^2)>0$,$x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2-1}$,$x_1x_2=\frac{2m^2+2}{2k^2-1}$.

由题知 $k_{AP}+k_{AQ}=\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=\frac{kx_1+m-1}{x_1-2}+\frac{kx_2+m-1}{x_2-2}=0$,

化简得 $2kx_1x_2+(m-1-2k)(x_1+x_2)-4(m-1)=0$,

则 $\frac{2k(2m^2+2)}{2k^2-1}+(m-1-2k)\left(-\frac{4km}{2k^2-1}\right)-4(m-1)=0$,

可得 $(k+1)(m+2k-1)=0$,因为直线 l 不过点 A,所以 $2k+m-1\neq0$,所以 $k=-1$,即直线 l 的斜率为 -1.

(2)设直线 AP 的倾斜角为 $\alpha\,(\tan\alpha>0)$,由 $\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$,可得 $\tan\frac{\angle PAQ}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

由 $2\alpha+\angle PAQ=\pi$,可得 $k_{AP}=\tan\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\angle PAQ}{2}\right)=\sqrt{2}$,即 $\frac{y_1-1}{x_1-2}=\sqrt{2}$,

又 $\frac{x_1^2}{2}-y_1^2=1$,所以 $x_1=\frac{10-4\sqrt{2}}{3}$,$y_1=\frac{4\sqrt{2}-5}{3}$,

代入直线 l 的方程,可得 $m=\frac{5}{3}$,则 $x_1+x_2=\frac{20}{3}$,$x_1x_2=\frac{68}{9}$.

因为 $|AP|=\sqrt{3}|x_1-2|$,$|AQ|=\sqrt{3}|x_2-2|$,

由 $\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$,可得 $\sin\angle PAQ=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

所以 $S_{\triangle PAQ}=\frac{1}{2}|AP||AQ|\sin\angle PAQ=\sqrt{2}|x_1x_2-2(x_1+$

$x_2)+4|=\frac{16\sqrt{2}}{9}$.

训练 27 解析几何(B)

1. **解**:(1)易知 $A(0,b)$,$B(0,-b)$,由题意可得 $\frac{|2b+1|}{\sqrt{5}}=3\times\frac{|-2b+1|}{\sqrt{5}}$,解得 $b=1$ 或 $b=\frac{1}{4}$,

当 $b=\frac{1}{4}$ 时,点 A,B 都在直线 l 的下方,不符合题意,所以 $b=1$.

(2)证明:由 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+y^2=1,\\ x-2y+1=0,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $(4+a^2)x^2+2a^2x-3a^2=0$,则 $\Delta>0$,

设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=-\frac{2a^2}{4+a^2}$,$x_1x_2=-\frac{3a^2}{4+a^2}$,

可得 $k_{BP}+k_{BQ}=\frac{y_1+1}{x_1}+\frac{y_2+1}{x_2}=\frac{\frac{1}{2}x_1+\frac{3}{2}}{x_1}+\frac{\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}}{x_2}=1+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=1+\frac{3}{2}\times\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=1+\frac{3}{2}\times\frac{\frac{-2a^2}{4+a^2}}{\frac{-3a^2}{4+a^2}}=2$,所以直线 BP 与 BQ 的斜率之和为定值 2.

2. **解**:(1)∵抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标为 $(1,0)$,∴椭圆 E 的右焦点的坐标为 $(1,0)$,即 $c=1$,又 $2a=2\sqrt{2}$,∴$a=\sqrt{2}$,∴$b^2=a^2-c^2=1$,即 $b=1$,∴椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)证明:由题知直线 AB 的斜率存在,且不为 0,故设直线 AB 的方程为 $x=my+t(m\neq0)$,则 $A(my_1+t,y_1)$,$B(my_2+t,y_2)$,由 $\begin{cases}x=my+t,\\ x^2+2y^2=2,\end{cases}$ 消去 x 整理得 $(m^2+2)y^2+2mty+t^2-2=0$,则 $\Delta=8(m^2-t^2+2)>0$,即 $m^2>t^2-2$,且 $y_1+y_2=\frac{-2mt}{m^2+2}$,$y_1y_2=\frac{t^2-2}{m^2+2}$.

∵$\angle OHA=\angle OHB$,∴$k_{AH}+k_{BH}=0$,∴$\frac{y_1}{my_1+t-2}+\frac{y_2}{my_2+t-2}=0$,即 $2my_1y_2+(t-2)(y_1+y_2)=0$,

∴$2m\cdot\frac{t^2-2}{m^2+2}-(t-2)\cdot\frac{2mt}{m^2+2}=0$,∴$t=1$,满足题意,∴直线 AB 过定点 $(1,0)$.

3. **解**:(1)由题得 $A(-1,0)$,$B(1,0)$,

因为点 $M(2,\sqrt{3})$,所以直线 BM 的斜率 $k_{BM}=\frac{\sqrt{3}-0}{2-1}=\sqrt{3}$,

所以直线 BM 的垂线 l 的方程为 $y-0=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$,

整理可得 $x=-\sqrt{3}y+2$,设点 $S(x_1,y_1)$,$T(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}y+2,\\ x^2-y^2=1,\end{cases}$ 消去 x 整理得 $2y^2-4\sqrt{3}y+3=0$,

则 $\Delta>0$,$y_1+y_2=2\sqrt{3}$,$y_1y_2=\frac{3}{2}$,

所以 $|ST|=\sqrt{1+(-\sqrt{3})^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{(2\sqrt{3})^2-4\times\frac{3}{2}}=2\sqrt{6}$.

可得原点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=1$,所以 $\triangle OST$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times|ST|\times d=\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times1=\sqrt{6}$.

(2)证明:若选择①②:

设 $D(0,y_D)$,$M(x_0,y_0)(x_0>1)$,且 $x_0^2-y_0^2=1$,

因为 A,D,M 三点共线,所以 $\frac{y_0}{x_0+1}=y_D$,

又 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DE}$,所以点 E 的坐标为 $\left(0,\frac{2y_0}{x_0+1}\right)$.

直线 BM 的斜率 $k_{BM}=\frac{y_0}{x_0-1}$,

因为 $BM\perp EQ$,所以 $k_{EQ}=-\frac{1}{k_{BM}}=\frac{1-x_0}{y_0}$.

设点 $Q(x_Q,0)$,

因为直线 EQ 的斜率 $k_{EQ}=\frac{1-x_0}{y_0}=\frac{\frac{2y_0}{x_0+1}}{-x_Q}$,

所以 $x_Q=\frac{2y_0^2}{x_0^2-1}=\frac{2y_0^2}{y_0^2}=2$,所以 $|OQ|=2$.

若选择①③:

设 $D(0,y_D)$,$M(x_0,y_0)(x_0>1)$,且 $x_0^2-y_0^2=1$,

因为 A,D,M 三点共线,所以 $\frac{y_0}{x_0+1}=y_D$,

又 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DE}$,所以点 E 的坐标为 $\left(0,\frac{2y_0}{x_0+1}\right)$.

因为 $|OQ|=2$,且点 Q 在 x 轴正半轴上,所以 $Q(2,0)$,

所以 $k_{EQ}=\frac{\frac{2y_0}{x_0+1}}{-2}=-\frac{y_0}{x_0+1}$,又 $k_{BM}=\frac{y_0}{x_0-1}$,

所以 $k_{BM}\cdot k_{EQ}=-\frac{y_0}{x_0-1}\cdot\frac{y_0}{x_0+1}=-\frac{y_0^2}{x_0^2-1}=-\frac{x_0^2-1}{x_0^2-1}=-1$,所以 $BM\perp EQ$.

若选择②③:

设 $D(0,y_D)$,$E(0,y_E)$,$M(x_0,y_0)(x_0>1)$,且 $x_0^2-y_0^2=1$,

不妨设 $y_0>0$,

因为 A,D,M 三点共线,

所以 $y_D=\frac{y_0}{x_0+1}>0$,且 $y_D^2=\frac{y_0^2}{(x_0+1)^2}=\frac{x_0^2-1}{(x_0+1)^2}=\frac{x_0-1}{x_0+1}$.

因为 $|OQ|=2$,且点 Q 在 x 轴正半轴上,所以 $Q(2,0)$,所以 $k_{EQ}=\frac{y_E-0}{0-2}$,

易知直线 BM 的斜率 $k_{BM}=\frac{y_0}{x_0-1}$,

因为 $BM\perp EQ$,所以 $k_{EQ}=-\frac{1}{k_{BM}}=\frac{1-x_0}{y_0}$,

所以 $y_E=\frac{2(x_0-1)}{y_0}>0$,且 $y_E^2=\frac{4(x_0-1)^2}{y_0^2}=\frac{4(x_0-1)^2}{x_0^2-1}=\frac{4(x_0-1)}{x_0+1}$,所以 $y_E=2y_D$,即 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DE}$.

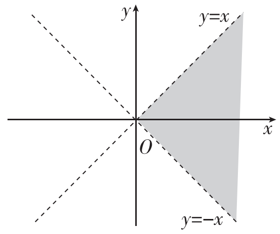
4. **解**:(1)由题得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}b,\\ \frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{2},\end{cases}$ 所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)易知 $A(2,0)$,$F(\sqrt{2},0)$,由题意可设 l 的方程为 $x=my+\sqrt{2}$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\\ x=my+\sqrt{2},\end{cases}$ 消去 x 整理得 $(m^2+2)y^2+2\sqrt{2}my-2=0$,则 $\Delta=16(m^2+1)>0$,$y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{2}m}{m^2+2}$,$y_1y_2=-\frac{2}{m^2+2}$,所以 $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}\times(2-\sqrt{2})\times|y_1-y_2|=\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})\sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{2}m}{m^2+2}\right)^2+\frac{8}{m^2+2}}=2(2-\sqrt{2})\frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}=2(2-\sqrt{2})\frac{1}{\sqrt{m^2+1}+\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}}\leqslant2-\sqrt{2}$,当且仅当 $m=0$ 时等

号成立,此时直线 l 的方程为 $x=\sqrt{2}$,所以△AMN 面积的最大值为 $2-\sqrt{2}$.

训练 28 解析几何(C)

1. **解**:(1)设动点 $M(x_0,y_0)$,由题意知 M 只能在如图所示的阴影内运动(不包含边界),



因为直线 MA 与直线 $y=x$ 垂直,直线 MB 与直线 $y=-x$ 垂直,所以四边形 $OAMB$ 为矩形,

且 $|AM|=\frac{|x_0-y_0|}{\sqrt{2}}$, $|MB|=\frac{|x_0+y_0|}{\sqrt{2}}$,

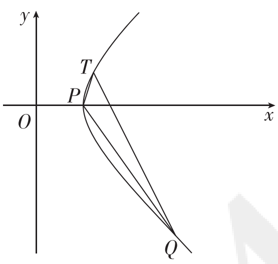
$x_0-y_0>0$, $x_0+y_0>0$.

因为四边形 $OAMB$ 的面积为 8,所以 $\frac{|x_0-y_0|}{\sqrt{2}}\cdot\frac{|x_0+y_0|}{\sqrt{2}}=8$,

即 $x_0^2-y_0^2=16$,

由 $x_0^2=16+y_0^2\geqslant16$ 及 $x_0>0$,得 $x_0\geqslant4$,所以轨迹 C 的方程为 $x^2-y^2=16(x\geqslant4)$,即 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1(x\geqslant4)$.

(2)如图,设直线 TP 的倾斜角为 α,斜率为 k,直线 TQ 的倾斜角为 β,则 TQ 的斜率为 $1-k$,



则 $\tan\alpha=k$, $\tan\beta=1-k$,因为点 $T(5,3)$ 在曲线 C 上,所以过点 T 的直线 TP 与曲线 C 有两个交点,则 $k>1$ 或 $k<-1$,同理 $1-k>1$ 或 $1-k<-1$,解得 $k>2$ 或 $k<-1$.

又由 $\tan\angle PTQ=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{1-k-k}{1+(1-k)k}=1$,解得 $k=3$ 或 $k=0$(舍去).

当 $k=3$ 时,直线 TP 的方程为 $y=3x-12$,

由 $\begin{cases}y=3x-12,\\x^2-y^2=16,\end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-9x+20=0$,则 $x=4$ 或 $x=5$,所以 $P(4,0)$.

当 $k=3$ 时,直线 TQ 的方程为 $y=-2x+13$,

由 $\begin{cases}y=-2x+13,\\x^2-y^2=16,\end{cases}$ 消去 y 得 $3x^2-52x+185=0$,

则 $x=\frac{37}{3}$ 或 $x=5$,

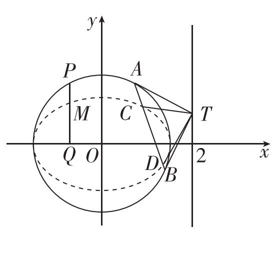
所以 $Q\left(\frac{37}{3},-\frac{35}{3}\right)$.则 $|TP|=\sqrt{(5-4)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$,

点 Q 到直线 TP 的距离 $d=\frac{\left|37+\frac{35}{3}-12\right|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{110}{3\sqrt{10}}$,所以

$S_{\triangle TPQ}=\frac{1}{2}\times|TP|\times d=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\frac{110}{3\sqrt{10}}=\frac{55}{3}$.

2. **解**:(1)设点 $M(x,y)$,由 $\sqrt{2}\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{PQ}$,得 $P(x,\sqrt{2}y)$,∵点 P 在圆 $C_1:x^2+y^2=2$ 上,∴$x^2+2y^2=2$,即点 M 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)如图所示,设点 $T(2,t)$, $A(x'_1,y'_1)$, $B(x'_2,y'_2)$,则 AT, BT 的方程分别为 $x'_1x+y'_1y=2$, $x'_2x+y'_2y=2$,



又点 $T(2,t)$ 在 AT, BT 上,

∴$2x'_1+ty'_1=2$①, $2x'_2+ty'_2=2$②,由①②知 AB 的方程为 $2x+ty=2$,则圆心 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{4+t^2}}$, $|AB|=2\sqrt{2-d^2}=2\sqrt{\frac{2t^2+4}{t^2+4}}$.

由 $\begin{cases}2x+ty=2,\\\frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(t^2+8)y^2-4ty-4=0$,设点 $C(x_1,y_1)$, $D(x_2,y_2)$,∴$\begin{cases}y_1+y_2=\frac{4t}{t^2+8},\\y_1y_2=\frac{-4}{t^2+8},\end{cases}$

∴$|CD|=\frac{2\sqrt{(t^2+4)(2t^2+8)}}{t^2+8}$,∴$\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{(t^2+8)\sqrt{t^2+2}}{(t^2+4)\sqrt{t^2+4}}$.

令 $t^2+4=s$,则 $s\geqslant4$,∴$\frac{|AB|}{|CD|}=\sqrt{1+\frac{6}{s}-\frac{32}{s^3}}$,设 $\frac{1}{s}=m$, $m\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$,则 $\frac{|AB|}{|CD|}=\sqrt{1+6m-32m^3}$.设 $f(m)=1+6m-32m^3$, $m\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$,则 $f'(m)=6-96m^2$,易知 $f'(m)$ 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right]$ 上单调递减,令 $f'(m)=0$,得 $m=\frac{1}{4}$,∴$f'(m)\geqslant0$ 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right]$ 上恒成立,∴$f(m)$ 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right]$ 上单调递增,故 $f(m)\in(1,2]$,

∴$\frac{|AB|}{|CD|}$ 的取值范围为 $(1,\sqrt{2}]$,即 $\frac{S_1}{S_2}$ 的取值范围为 $(1,\sqrt{2}]$.

3. **解**:(1)由 $|F_1F_2|=2\sqrt{3}$,得 $c=\sqrt{3}$,连接 AF_1, AF_2,

由点 $A(\sqrt{3},2)$ 在双曲线 E 上,

得 $2a=|AF_1|-|AF_2|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}-2=4-2=2$,解得 $a=1$,则 $b^2=c^2-a^2=2$,

故双曲线 E 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)证明:设 $H(x,y)$, $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$,

则 $x_1^2-\frac{y_1^2}{2}=1$, $x_2^2-\frac{y_2^2}{2}=1$,即 $y_1^2=2(x_1^2-1)$①,

$y_2^2=2(x_2^2-1)$②.

设 $\frac{|PM|}{|PN|}=\frac{|MH|}{|HN|}=\lambda(\lambda\neq1)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PN},\\\overrightarrow{MH}=\lambda\overrightarrow{HN},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(x_1-2,y_1-1)=\lambda(x_2-2,y_2-1),\\(x-x_1,y-y_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y),\end{cases}$

故 $x_1^2-\lambda^2x_2^2=2(1-\lambda^2)x$③, $y_1^2-\lambda^2y_2^2=(1-\lambda^2)y$④,

将①②代入④,得 $2[x_1^2-\lambda^2x_2^2-(1-\lambda^2)]=(1-\lambda^2)y$⑤,

将③代入⑤,得 $2[(1-\lambda^2)2x-(1-\lambda^2)]=(1-\lambda^2)y$,即 $4x-2=y$,

故点 H 恒在定直线 $4x-y-2=0$ 上.

4. **解**:(1)因为点 $M(4,m)$ 在抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$ 上,且△OMF 的面积为 $\frac{1}{2}p^2$,所以 $\begin{cases}m^2=8p,\\\frac{1}{2}\times\frac{p}{2}\cdot|m|=\frac{p^2}{2},\end{cases}$ 可得 $p=2$,因此抛物线 E 的方程为 $y^2=4x$.

(2)由(1)知 $F(1,0)$.由题意知,直线 l 的斜率存在且不为 0,因此设直线 l 的方程为 $x=ty+1(t\neq0)$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$.由 $\begin{cases}x=ty+1,\\y^2=4x,\end{cases}$ 得 $y^2-4ty-4=0$,则 $\Delta_1=(-4t)^2+16>0$, $y_1+y_2=4t$, $y_1y_2=-4$.

因为 AC 垂直于直线 l,所以直线 AC 的方程为 $y-y_1=-t(x-x_1)$,由 $\begin{cases}y-y_1=-t(x-x_1),\\y^2=4x,\end{cases}$ 得 $ty^2+4y-4tx_1-4y_1=0$,所以 $\Delta_2=16+16t(tx_1+y_1)=4(ty_1+2)^2>0$, $y_1+y_3=-\frac{4}{t}$, $y_1y_3=\frac{-4tx_1-4y_1}{t}(t\neq0)$,

因此 $|AC|=\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}|y_1-y_3|=\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}\cdot\sqrt{(y_1+y_3)^2-4y_1y_3}=\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}\cdot\sqrt{\left(-\frac{4}{t}\right)^2+\frac{16tx_1+16y_1}{t}}=$

$\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}\cdot\sqrt{\frac{16+16t^2x_1+16ty_1}{t^2}}=\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}\cdot$ $\sqrt{\frac{16+4t^2y_1^2+16ty_1}{t^2}}=\frac{2\sqrt{t^2+1}}{t^2}|ty_1+2|=\frac{2\sqrt{t^2+1}}{t^2}(ty_1+2)$ $(ty_1+2=x_1+1>0)$.同理可得$|BD|=\frac{2\sqrt{t^2+1}}{t^2}\cdot(ty_2+2)$.因此 $|AC|+|BD|=\frac{2\sqrt{t^2+1}}{t^2}\cdot[t(y_1+y_2)+4]=\frac{8\sqrt{t^2+1}}{t^2}(t^2+1)=$ $8\sqrt{\frac{(t^2+1)^3}{t^4}}$.令 $f(x)=\frac{(x+1)^3}{x^2}(x>0)$,则 $f'(x)=$ $\frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}(x>0)$,

由 $f'(x)>0$ 得 $x>2$,由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<2$.所以函数 $f(x)$在$(0,2)$上单调递减,在$(2,+\infty)$上单调递增,因此当 $x=2$ 时,函数 $f(x)$取得最小值,最小值为$\frac{27}{4}$,所以当 $t=\pm\sqrt{2}$时,$\sqrt{\frac{(t^2+1)^3}{t^4}}$取得最小值,最小值为$\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,因此 $|AC|+|BD|$的最小值为 $8\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$.

训练 29　概率与统计(A)

1. **解**:(1)令 $u=\frac{1}{x}$,设 y 关于 u 的经验回归方程为 $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}u$.

由题意可得 $\hat{\beta}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{10}u_iy_i-10\overline{u}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{10}u_i^2-10\overline{u}^2}=\frac{350-210}{1.6-0.9}=200$,

$\hat{\alpha}=\overline{y}-\hat{\beta}\overline{u}=70-200\times0.3=10$,则 $\hat{y}=10+200\hat{u}$,

所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=10+\frac{200}{x}$.

(2)由 $y=10+\frac{200}{x}$可得 $x=\frac{200}{y-10}$,

则年利润 $M=m-x-10=-\frac{y^2}{500}+\frac{2y}{25}+\frac{200}{y-10}+100-\frac{200}{y-10}-10=-\frac{1}{500}(y-20)^2+90.8$,

当 $y=20$ 时,年利润 M 取得最大值,此时 $x=\frac{200}{20-10}=20$,

所以当年技术创新投入为 20 千万元时,年利润取得最大值.

2. **解**:(1)列联表补充完整如下.

单位:人

性别	参与意愿		合计
	愿意参与	不愿意参与	
男性	48	12	60
女性	22	18	40
合计	70	30	100

零假设为 H_0:参与意愿与性别无关联,即男性与女性的参与意愿没有差异.

根据列联表中的数据可得,$\chi^2=\frac{100\times(48\times18-22\times12)^2}{60\times40\times70\times30}=\frac{50}{7}\approx7.143>6.635=x_{0.01}$.

根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,我们推断 H_0 不成立,所以认为参与意愿与性别有关联,此推断犯错误的概率不大于 0.01.

而根据表中数据,男性和女性愿意参与活动的频率分别为 $\frac{48}{60}=\frac{4}{5}$和$\frac{22}{40}=\frac{11}{20}$,

而$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{11}{20}}=\frac{16}{11}\approx1.455$,可见在调查中,男性愿意参与活动的频率明显大于女性参与活动的频率,

故我们可以认为男性比女性更愿意参与活动.

(2)X 的可能取值为 0,1,2,3,

则 $P(X=0)=\frac{C_4^0C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}$,$P(X=1)=\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35}$,

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$,$P(X=3)=\frac{C_4^3C_3^0}{C_7^3}=\frac{4}{35}$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

故 $E(X)=0\times\frac{1}{35}+1\times\frac{12}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{4}{35}=\frac{12}{7}$.

3. **解**:(1)一粒水稻种子能成长为幼苗需要先成功发芽,再成功成活,故所求概率 $P=0.9\times0.8=0.72$.

(2)设没有发芽的种子数为 M,则 $M\sim B(0.1,5000)$,则 $D(M)=5000\times0.1\times0.9=450$,又 $X=3M$,所以 $D(X)=9D(M)=9\times450=4050$,即 X 的方差为 4050.

(3)设活动结束时为第 $n(n\in\mathbf{N}^*)$个月,则 $2n+16=30-2(n-1)$,解得 $n=4$.设任意一人参加活动的时间为 Y,则 Y 的可能取值为 1,2,3,4,$P(Y=1)=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$,

$P(Y=2)=\left(1-\frac{18}{30}\right)\times\frac{20}{28}=\frac{2}{7}$,

$P(Y=3)=\left(1-\frac{18}{30}\right)\times\left(1-\frac{20}{28}\right)\times\frac{22}{26}=\frac{44}{455}$,

$P(Y=4)=\left(1-\frac{18}{30}\right)\times\left(1-\frac{20}{28}\right)\times\left(1-\frac{22}{26}\right)\times1=\frac{8}{455}$,

所以 Y 的分布列为

Y	1	2	3	4
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{44}{455}$	$\frac{8}{455}$

故 $E(Y)=1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{44}{455}+4\times\frac{8}{455}=\frac{697}{455}$,即任意一人参加活动时间的期望为$\frac{697}{455}$.

4. **解**:(1)设 $A_1=$“抽到第一个袋子”,$A_2=$“抽到第二个袋子”,$B=$“恰好抽到一名男生和一名女生的报名表”,则 $P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$,$P(B|A_1)=\frac{C_5^1C_4^1}{C_9^2}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$,

$P(B|A_2)=\frac{C_6^1C_5^1}{C_{11}^2}=\frac{6}{11}$,由全概率公式得 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{11}=\frac{109}{198}$.

(2)①设在一轮比赛中这 2 名学生的得分为 X,则 X 的可能取值为$-2,0,2$,$P(X=-2)=\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{6}{25}$,

$P(X=0)=\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{2}{5}\right)+\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\frac{2}{5}=\frac{13}{25}$,

$P(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$,所以 X 的分布列为

X	−2	0	2
P	$\frac{6}{25}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{6}{25}$

②设在两轮比赛中这 2 名学生的得分为 Y,则 Y 的可能取值为$-4,-2,0,2,4$,

$P(Y=-4)=\frac{6}{25}\times\frac{6}{25}=\frac{36}{625}$,$P(Y=-2)=\frac{6}{25}\times\frac{13}{25}+\frac{13}{25}\times\frac{6}{25}=\frac{156}{625}$,$P(Y=0)=\frac{6}{25}\times\frac{6}{25}+\frac{13}{25}\times\frac{13}{25}+\frac{6}{25}\times\frac{6}{25}=\frac{241}{625}$,

$P(Y=2)=\frac{6}{25}\times\frac{13}{25}+\frac{13}{25}\times\frac{6}{25}=\frac{156}{625}$,$P(Y=4)=\frac{6}{25}\times\frac{6}{25}=\frac{36}{625}$,所以 Y 的分布列为

Y	-4	-2	0	2	4
P	$\frac{36}{625}$	$\frac{156}{625}$	$\frac{241}{625}$	$\frac{156}{625}$	$\frac{36}{625}$

故 $E(Y)=(-4)\times\frac{36}{625}+(-2)\times\frac{156}{625}+0\times\frac{241}{625}+2\times\frac{156}{625}+4\times\frac{36}{625}=0$.

训练 30　概率与统计(B)

1. **解**:(1)依题意知,X 服从超几何分布,且 $N=5000$,$M=200$,$n=500$,故 $E(X)=500\times\frac{200}{5000}=20$.

(2)当 $N<685$ 时,$P(X=15)=0$,当 $N\geqslant 685$ 时,$P(X=15)=\frac{C_{200}^{15}C_{N-200}^{485}}{C_N^{500}}$,记 $a(N)=\frac{C_{200}^{15}C_{N-200}^{485}}{C_N^{500}}$,

则 $\frac{a(N+1)}{a(N)}=\frac{C_{N+1-200}^{485}C_N^{500}}{C_{N+1}^{500}C_{N-200}^{485}}=\frac{(N+1-500)(N+1-200)}{(N+1)(N+1-200-485)}=\frac{(N-499)(N-199)}{(N+1)(N-684)}=\frac{N^2-698N+499\times199}{N^2-683N-684}$,

由 $N^2-698N+499\times199>N^2-683N-684$,可得 $N<\frac{499\times199+684}{15}\approx6665.7$,

则当 $685\leqslant N\leqslant 6665$ 时,$a(N+1)>a(N)$;当 $N\geqslant 6666$ 时,$a(N+1)<a(N)$,

故当 $N=6666$ 时,$a(N)$ 最大,所以 N 的估计值为 6666.

2. **证明**:(1)由题意知 $X\sim B(N,p)$,则 $E(X)=pN$,

因为 $f(X)=\frac{N}{K}+KX$,所以 $E[f(X)]=\frac{N}{K}+K\cdot E(X)=\frac{N}{K}+K\cdot pN\geqslant 2\sqrt{p}\cdot N$,

当且仅当 $\frac{N}{K}=K\cdot pN$,即 $K=\frac{\sqrt{p}}{p}$ 时取等号.

(2)记 $P_i=P$(混管中恰有 i 例阳性)$=C_K^i p^i(1-p)^{K-i}$,$i=0,1,\cdots,K$,因为当 $x\to0$ 时,$e^x\approx x+1$,所以 $x\approx\ln(x+1)$.

则当 $0<p<10^{-4}$,$10\leqslant K\leqslant 20$ 时,$(1-p)^K=e^{K\ln(1-p)}\approx e^{-Kp}\approx1-Kp$,

则 P(混管中恰有 1 例阳性|混管检测结果为阳性)$=\frac{P_1}{1-P_0}=\frac{Kp(1-p)^{K-1}}{1-(1-p)^K}\approx\frac{Kp[1-(K-1)p]}{Kp}=1-(K-1)p\approx1$,

故若某混管检测结果为阳性,则参与该混管检测的人中大概率恰有一人为阳性.

3. **解**:(1)设抛掷结果中甲正面朝上次数等于乙正面朝上次数的概率为 P_1,

则 $P_1=\frac{C_3^0\cdot C_3^0+C_3^1\cdot C_3^1+C_3^2\cdot C_3^2+C_3^3\cdot C_3^3}{2^3\times2^3}=\frac{5}{16}$,

由对称性可知,甲正面朝上次数大于乙正面朝上次数的概率与甲正面朝上次数小于乙正面朝上次数的概率相等,故所求概率 $P=\frac{1-P_1}{2}=\frac{11}{32}$.

(2)可以先考虑甲、乙各抛掷 n 次的情形:

①如果出现甲正面朝上次数等于乙正面朝上次数,将该情形出现的概率设为 p_1,则第 $n+1$ 次甲必须再抛掷出正面朝上,才能使得最终甲正面朝上次数大于乙正面朝上次数;

②如果出现甲正面朝上次数小于乙正面朝上次数,则第 $n+1$ 次无论结果如何,最终甲正面朝上次数仍然不大于乙正面朝上次数,将该情形出现的概率设为 p_2;

③如果出现甲正面朝上次数大于乙正面朝上次数,则第 $n+1$ 次无论结果如何,最终甲正面朝上次数仍然大于乙正面朝上次数,将该情形出现的概率设为 p_3,由对称性可知 $p_2=p_3$.

故所求概率为 $\frac{1}{2}p_1+p_3$,又 $\begin{cases}p_2=p_3,\\p_1+p_2+p_3=1,\end{cases}$

所以所求概率为 $\frac{1}{2}p_1+p_3=\frac{p_1+2p_3}{2}=\frac{p_1+p_2+p_3}{2}=\frac{1}{2}$.

4. **解**:(1)设 A_1="甲作为一辩出场",A_2="甲作为二辩出场",A_3="甲作为三辩出场",A_4="甲作为四辩出场",B="某场比赛中该辩论队获胜".

则 $P(A_1)=\frac{20}{100}=0.2$,$P(A_2)=\frac{30}{100}=0.3$,

$P(A_3)=\frac{25}{100}=0.25$,$P(A_4)=\frac{25}{100}=0.25$;

$P(B|A_1)=\frac{14}{20}=0.7$,$P(B|A_2)=\frac{21}{30}=0.7$,

$P(B|A_3)=\frac{20}{25}=0.8$,$P(B|A_4)=\frac{20}{25}=0.8$.

所以由全概率公式可得 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)+P(A_4)P(B|A_4)=0.2\times0.7+0.3\times0.7+0.25\times0.8+0.25\times0.8=0.75$.

所以甲参加比赛时,其所在辩论队某场比赛获胜的概率是 0.75.

(2)设 C_i="5 场比赛中有 i 场获胜"($i=3,4,5$),D="甲所在辩论队顺利晋级",

则 $P(C_3D)=C_5^3\times\left(\frac{3}{4}\right)^3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{270}{1024}=\frac{135}{512}$,$P(C_4D)=C_5^4\times\left(\frac{3}{4}\right)^4\times\frac{1}{4}=\frac{405}{1024}$,$P(C_5D)=C_5^5\times\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{243}{1024}$,

则 $P(D)=P(C_3D)+P(C_4D)+P(C_5D)=\frac{918}{1024}=\frac{459}{512}$,

由题得,X 的所有可能取值为 3,4,5,

所以 $P(X=3)=P(C_3|D)=\frac{P(C_3D)}{P(D)}=\frac{270}{918}=\frac{5}{17}$,

$P(X=4)=P(C_4|D)=\frac{P(C_4D)}{P(D)}=\frac{405}{918}=\frac{15}{34}$,

$P(X=5)=P(C_5|D)=\frac{P(C_5D)}{P(D)}=\frac{243}{918}=\frac{9}{34}$.

则 X 的分布列为

X	3	4	5
P	$\frac{5}{17}$	$\frac{15}{34}$	$\frac{9}{34}$

$E(X)=3\times\frac{5}{17}+4\times\frac{15}{34}+5\times\frac{9}{34}=\frac{135}{34}$.

训练 31　概率与统计(C)

1. **解**:(1)设甲答对题目的个数为 X,由题意,得 $X\sim B(3,p)$,则甲被录用的概率为 $P_1=C_3^2p^2(1-p)+p^3=3p^2-2p^3$,乙被录用的概率为 $P_2=p^2$.

(2)Y 的可能取值为 0,1,2,则 $P(Y=0)=(1-P_1)(1-P_2)$,$P(Y=1)=P_1(1-P_2)+(1-P_1)P_2$,$P(Y=2)=P_1P_2$,

$\therefore E(Y)=0\times(1-P_1)(1-P_2)+1\times[P_1(1-P_2)+(1-P_1)P_2]+2\times P_1P_2=P_1+P_2=3p^2-2p^3+p^2=4p^2-2p^3$.

设 $f(p)=4p^2-2p^3(0<p<1)$,则 $f'(p)=8p-6p^2=2p(4-3p)>0$.$\therefore$当 $0<p<1$ 时,$f(p)$ 单调递增.

又 $f(0)=0$,$f(1)=2$,$\therefore$存在唯一的 p 的值 p_0,使得 $f(p_0)=1.5$,即 $E(Y)=1.5$.

2. **解**:(1)根据题意,X 的可能取值为 1,2,3,

$P(X=1)=1-p$,$P(X=2)=p(1-p)$,$P(X=3)=p^2$,

所以 $E(X)=1-p+2p(1-p)+3p^2=p^2+p+1$,

由 $E(X)=p^2+p+1>\frac{7}{4}$,得 $p>\frac{1}{2}$ 或 $p<-\frac{3}{2}$,

又 $0<p<1$,所以 p 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

(2)$P(Y=k)=p^k(1-p)$,

其中 $k=0,1,2,\cdots,n-1$,$P(Y=n)=p^n$.

方法一:Y 的均值 $E(Y)=p(1-p)+2p^2(1-p)+\cdots+(n-1)p^{n-1}(1-p)+np^n=(1-p)[p+2p^2+3p^3+\cdots+(n-1)p^{n-1}]+np^n$,

设 $S_n=p+2p^2+3p^3+\cdots+(n-1)p^{n-1}$,

则 $pS_n=p^2+2p^3+\cdots+(n-2)p^{n-1}+(n-1)p^n$,

利用错位相减法可得 $(1-p)S_n=p+p^2+p^3+\cdots+p^{n-1}-(n-1)p^n=\frac{p(1-p^{n-1})}{1-p}-(n-1)p^n$,

所以 $S_n=\frac{p(1-p^{n-1})}{(1-p)^2}-\frac{(n-1)p^n}{1-p}$,

所以 $E(Y)=(1-p)S_n+np^n=\frac{p-p^{n+1}}{1-p}$.

方法二:$E(Y)=(p-p^2)+(2p^2-2p^3)+(3p^3-3p^4)+\cdots+[(n-1)p^{n-1}-(n-1)p^n]+np^n=p+p^2+p^3+\cdots+p^{n-1}+p^n=\frac{p-p^{n+1}}{1-p}$.

3. **解**:(1)X 的可能取值为3,4,

$P(X=3)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$,则 $P(X=4)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$,

∴X 的分布列为

X	3	4
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$

(2)由(1)知 $P(X=4)=\frac{4}{5}$,

则 Y 服从二项分布,即 $Y\sim B\left(300,\frac{4}{5}\right)$.

$P(Y=k)=C_{300}^{k}\left(\frac{4}{5}\right)^{k}\left(\frac{1}{5}\right)^{300-k}(k=0,1,2,\cdots,300)$,

由 $\begin{cases}C_{300}^{k}\left(\frac{4}{5}\right)^{k}\left(\frac{1}{5}\right)^{300-k}\geqslant C_{300}^{k+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{300-(k+1)},\\ C_{300}^{k}\left(\frac{4}{5}\right)^{k}\left(\frac{1}{5}\right)^{300-k}\geqslant C_{300}^{k-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{300-(k-1)},\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}k\geqslant\frac{1199}{5},\\ k\leqslant\frac{1204}{5},\end{cases}$ ∴$k=240$,即 $P(Y=k)$ 取最大值时的 k 的值为240.

4. **解**:(1)由题可知,X 的可能取值为$-1,0,1$,

$P(X=-1)=\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{12}$,

$P(X=0)=\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{5}{12}$,

$P(X=1)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$,故 X 的分布列为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$

则数学期望 $E(X)=-1\times\frac{1}{12}+0\times\frac{5}{12}+1\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$.

(2)由题可知,$P_1=1,P_2=1,P_3=1-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8},P_4=1-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{13}{16}$.

经分析可得,当 $n\geqslant4$ 时,

若第 n 轮没有得1分,则 $P_n=\frac{1}{2}P_{n-1}$;

若第 n 轮得1分,且第 $n-1$ 轮没有得1分,则 $P_n=\frac{1}{4}P_{n-2}$;

若第 n 轮得1分,且第 $n-1$ 轮得1分,第 $n-2$ 轮没有得1分,则 $P_n=\frac{1}{8}P_{n-3}$.

故 $P_n=\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}+\frac{1}{8}P_{n-3}(n\geqslant4)$,

故 $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{4},c=\frac{1}{8}$.

因为 $P_n=\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}+\frac{1}{8}P_{n-3}(n\geqslant4)$,

所以 $P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}+\frac{1}{8}P_{n-2}(n\geqslant3)$,

故 $P_{n+1}-P_n=-\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}+\frac{1}{8}P_{n-2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}+\frac{1}{8}P_{n-3}\right)+\frac{1}{4}P_{n-1}+\frac{1}{8}P_{n-2}=-\frac{1}{16}P_{n-3}<0(n\geqslant4)$,故 $P_{n+1}<P_n(n\geqslant4)$,

又 $P_1=P_2>P_3>P_4$,则 $P_1=P_2>P_3>P_4>P_5>\cdots$,

所以答题轮数越多(轮数不少于3),出现“连续三轮每轮得1分”的概率越大.

训练32　8单选+3多选+3填空

1. B 【解析】因为 $A=\{x|x+1>0\}=\{x|x>-1\}$,$B=\{y|y=\sqrt{1-2^x}\}=\{y|0\leqslant y<1\}$,所以 $A\cap B=\{x|0\leqslant x<1\}=[0,1)$.故选B.

2. D 【解析】因为全称量词命题的否定为存在量词命题,所以命题 p 的否定为“$\exists x\in\mathbf{Z},x^2<0$”.故选D.

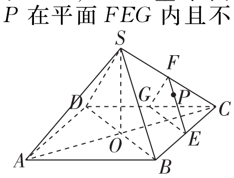
3. B 【解析】二项式 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2x}\right)^6$ 的展开式共有7项,则二项式系数最大的是第4项.故选B.

4. A 【解析】依题意得 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{5}$,所以 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta=-\frac{3}{5}$.故选A.

5. D 【解析】因为 A,B,C 成等差数列,所以 $2B=A+C$,又 $A+B+C=180^\circ$,所以 $B=60^\circ$.由 $\sin(60^\circ+\alpha)=\frac{3}{5}+\sin\alpha$,得 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{3}{5}$,所以 $\cos(30^\circ+\alpha)=\frac{3}{5}$.则 $\sin(\alpha+300^\circ)=\sin(270^\circ+30^\circ+\alpha)=-\cos(30^\circ+\alpha)=-\frac{3}{5}$.故选D.

6. C 【解析】由斐波那契数列可知,从第3项起,每一项都是它前面两项的和,所以接下来的圆弧的半径是 $5+8=13$,圆弧的长是 $\frac{13\pi}{2}$.设圆锥的底面半径是 r,则 $2\pi r=\frac{13}{2}\pi$,解得 $r=\frac{13}{4}$.故选C.

7. D 【解析】如图,分别取 DC,SC 的中点 G,F,顺次连接 G,E,F,∵E 是 BC 的中点,∴$GE/\!/DB$,$FE/\!/SB$,∵$GE\not\subset$平面 SBD,$DB\subset$平面 SBD,$FE\not\subset$平面 SBD,$SB\subset$平面 SBD,∴$GE/\!/$平面 SBD,$FE/\!/$平面 SBD,又 $GE\cap FE=E$,∴平面 $FEG/\!/$平面 SBD.∵$SO\perp$平面 $ABCD$,$AC\subset$平面 $ABCD$,∴$SO\perp AC$,∵四边形 $ABCD$ 是菱形,∴$DB\perp AC$,又 $SO\cap DB=O$,$SO\subset$平面 SBD,$DB\subset$平面 SBD,∴$AC\perp$平面 SBD,则 $AC\perp$平面 FEG,故只要动点 P 在平面 FEG 内且不与点 E 重合,则总能够保持 $PE\perp AC$,又动点 P 在棱锥表面上运动,∴动点 P 的轨迹的长即为△FEG 的周长.



∵四边形 $ABCD$ 是边长为6的菱形且 $\angle BAD=60^\circ$,

∴$BD=6$,则 $OB=OD=3$,又 $SO=4$,∴$SB=SD=5$,故 $FE=FG=\frac{5}{2}$,$GE=3$,

∴△FEG 的周长为 $\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+3=8$.故选D.

8. B 【解析】因为 $\frac{\pi}{4}<1.04<\frac{\pi}{3}$,所以 $x=\tan1.04<\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,且 $x=\tan1.04>\tan\frac{\pi}{4}=1$,则 $1<x<\sqrt{3}$,可得 $0=\log_3 1<a=\log_3 x<\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$,即 $0<a<\frac{1}{2}$.所以 $1=2^0<b=2^a<2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$,即 $1<b<\sqrt{2}$.所以 $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}<\sin1<c=\sin b<1$,即 $\frac{1}{2}<c<1$.所以 $a<c<b$.故选B.

9. BCD 【解析】函数 $f(x)=e^x-2x+1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f'(x)=e^x-2$.由 $f'(x)=0$,得 $x=\ln2$,所以当 $x\in(-\infty,\ln2)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,当 $x\in(\ln2,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,所以当 $x=\ln2$ 时,$f(x)$ 取得极小值,$f(x)$ 无极大值,也无最大值,函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(\ln2)=3-2\ln2$,所以B,C,D正确,A错误.故选BCD.

10. ACD 【解析】对于A,设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则 $\bar{z}=a-bi$,所以 $z+\bar{z}=a+bi+a-bi=2a\in\mathbf{R}$,故A正确;对于B,设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,因为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,所以 $|\cos\theta|\neq1$,所以 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos\theta|\neq|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$,故B错误;对于C,设 $z_1=a+bi,z_2=c+di$,$a,b,c,d\in\mathbf{R}$,则 $z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci-bd=(ac-bd)+(ad+bc)i$,可得 $|z_1\cdot z_2|=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$,又 $|z_1|\cdot|z_2|=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$,所以 $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$,故C正确;对于D,因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,所以 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,故D正确.故选ACD.

11. ABC 【解析】设椭圆 C 的上顶点为 D,因为椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$,所以 $a=5,b=3,c=4$,所以 $F_1(-4,0)$,$F_2(4,0)$,$A(-5,0)$,$B(5,0)$,$D(0,3)$.对于A选项,因为 $\overrightarrow{DF_1}=(-4,-3)$,$\overrightarrow{DF_2}=(4,-3)$,所以 $\overrightarrow{DF_1}\cdot\overrightarrow{DF_2}=-16+9=-7<0$,所以 $\angle F_1PF_2$ 最大时,对应的角为钝角,故存在 P 使得 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$,A正确;对于B选项,记 $|PF_1|=m$,$|PF_2|=n$,则 $m+n=10$,在△PF_1F_2 中,由余

弦定理得 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{m^2+n^2-64}{2mn}=\frac{(m+n)^2-2mn-64}{2mn}=\frac{36-2mn}{2mn}=\frac{18}{mn}-1\geqslant\frac{18}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2}-1=-\frac{7}{25}$,当且仅当 $m=n$,即 $|PF_1|=|PF_2|$ 时取等号,B正确;对于C选项,因为 $PF_1\perp PF_2$,所以 $m+n=10$,$m^2+n^2=64$,可得 $mn=\frac{1}{2}[(m+n)^2-(m^2+n^2)]=18$,所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}mn=9$,C正确;对于D选项,设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm5)$,则 $\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1$,可得 $k_{PA}=\frac{y_0}{x_0+5}$,$k_{PB}=\frac{y_0}{x_0-5}$,于是 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_0}{x_0+5}\cdot\frac{y_0}{x_0-5}=\frac{y_0^2}{x_0^2-25}=\frac{9\left(1-\frac{x_0^2}{25}\right)}{x_0^2-25}=-\frac{9}{25}$,D错误.故选ABC.

12. 0.5 【解析】由题意知 $\overline{x}=\frac{1}{5}\times(1+2+3+4+5)=3$,$\overline{y}=\frac{1}{5}\times(m+0.8+2m+1.2+1.5)=0.6m+0.7$,因为经验回归直线 $\hat{y}=0.24x+0.28$ 过点 $(3,0.6m+0.7)$,所以 $0.6m+0.7=0.24\times3+0.28$,解得 $m=0.5$.

13. $a_n=-4n+3$ 【解析】因为 $S_n=(a-2)n^2+n+a$,所以当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2a-1$,当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2(a-2)n+(3-a)$,所以 $a_2=4(a-2)+(3-a)=3a-5$,当 $n\geqslant2$ 时,$a_{n+1}-a_n=2(a-2)$,又 $a_2-a_1=3a-5-(2a-1)=a-4$,数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,所以 $2(a-2)=a-4$,所以 $a=0$,则 $a_n=-4n+3$.

14. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$或$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,易知 $F(-c,0)$.因为 $|AF|=3|FB|$,A,F,B 三点共线,且 F 在 A,B 之间,所以 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$,所以 $(-c-x_1,-y_1)=3(x_2+c,y_2)$,所以 $x_1+3x_2=-4c$①,$y_1+3y_2=0$②.因为 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 在椭圆上,所以 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 所以 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{9x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{9y_2^2}{b^2}=-8$,则 $\frac{(x_1+3x_2)(x_1-3x_2)}{a^2}+\frac{(y_1+3y_2)(y_1-3y_2)}{b^2}=-8$,将①②代入上式得 $\frac{-4c(x_1-3x_2)}{a^2}=-8$,所以 $x_1-3x_2=\frac{2a^2}{c}$,与①联立消去 x_2,得 $x_1=\frac{a^2}{c}-2c$,因为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $a^2=3c^2$,所以 $x_1=c$,又 $b^2=a^2-c^2=2c^2$,所以由 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$,可得 $y_1=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}c$.当 $y_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}c$ 时,直线 l 的斜率 $k=\frac{y_1}{x_1+c}=\frac{\sqrt{3}}{3}$;当 $y_1=-\frac{2\sqrt{3}}{3}c$ 时,直线 l 的斜率 $k=\frac{y_1}{x_1+c}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.所以直线 l 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

训练33 8单选+3多选+3填空

1. C 【解析】由 $\begin{cases}y=\sqrt{1-x^2},\\ y=x,\end{cases}$ 可得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 $A\cap B=\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.故选C.

2. C 【解析】$\because z$ 在复平面内对应的点为 (x,y),$\therefore z=x+y\mathrm{i}$,$\because |z-2\mathrm{i}|=\sqrt{3}$,$\therefore \sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{3}$,即 $x^2+(y-2)^2=3$.故选C.

3. D 【解析】$\because \boldsymbol{a}\perp(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,$\therefore \boldsymbol{a}\cdot(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=3|\boldsymbol{a}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-3|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{a}|\times2\sqrt{3}|\boldsymbol{a}|}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,故 $\theta=\frac{5\pi}{6}$,故选D.

4. A 【解析】由题意知 $y'=m\mathrm{e}^x+\ln x+1$,$\therefore$ 曲线 $y=m\mathrm{e}^x+x\ln x$ 在点 $A(1,m\mathrm{e})$ 处的切线的斜率 $k=m\mathrm{e}+1=2$,$\therefore m=\mathrm{e}^{-1}$,$\therefore A(1,1)$.将点 A 的坐标代入 $y=2x+t$,得 $2+t=1$,$\therefore t=-1$.故选A.

5. A 【解析】由题意知 $\beta=2k\pi+\alpha+\frac{\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$,根据三角函数的定义得 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\cos\alpha=\frac{3}{5}$,所以 $\cos\beta=\cos\left(2k\pi+\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$,$k\in\mathbf{Z}$,故选A.

6. C 【解析】设经过 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 年后,每年度平均每户较上一年增加的收入为 y 元,则 $y=4000(1+0.1)^n$,令 $y=4000(1+0.1)^n>12\ 000$,即 $1.1^n>3$,则 $n>\log_{1.1}3=\frac{\ln3}{\ln1.1}=\frac{\ln3}{\ln11-\ln10}\approx11$,所以所求年份是2037年.故选C.

7. D 【解析】$f(x)=\cos^4x-\sin^4x+2\sin x\cos x+2=(\cos^2x+\sin^2x)(\cos^2x-\sin^2x)+\sin2x+2=\cos2x+\sin2x+2=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2$,由 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,可得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$,当 $k=0$ 时,$x=-\frac{\pi}{8}$,故函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{8},2\right)$ 对称.由等差中项的性质可得 $a_1+a_{13}=a_2+a_{12}=\cdots=a_6+a_8=2a_7$,所以数列 $\{y_n\}$ 的前13项和为 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{13})=6\times4+2=26$.故选D.

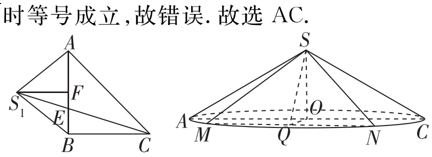
8. D 【解析】由题可知 $y=3x+\frac{1}{x}$ 的渐近线方程为 $y=3x$,$x=0$,所以该双曲线的焦点在直线 $y=3x$ 与 $x=0$ 的夹角(锐角)的平分线 l 上.设直线 l 的方程为 $y=kx$ 且 $k>3$,设 α,β 分别是直线 $y=kx$,$y=3x$ 的倾斜角,则 $\tan\alpha=k$,$\tan\beta=3$,故 $\alpha-\beta$ 为双曲线旋转后其中一条渐近线的倾斜角.因为直线 $y=kx$ 是直线 $y=3x$ 与 $x=0$ 的夹角(锐角)的平分线,所以 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$,则 $\tan(\alpha-\beta)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{k}$,又由 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{k-3}{1+3k}=\frac{1}{k}$,整理得 $k^2-6k-1=0$,可得 $k=3\pm\sqrt{10}$,因为 $k>3$,所以 $k=3+\sqrt{10}$,即 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{3+\sqrt{10}}=\sqrt{10}-3$.设焦点位于 x 轴上的双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,则双曲线 C 的一条渐近线的斜率为 $\frac{b}{a}$,所以 $\frac{b}{a}=\sqrt{10}-3$,所以双曲线 C 的离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+(\sqrt{10}-3)^2}=\sqrt{20-6\sqrt{10}}$.故选D.

9. BD 【解析】由题意设 A_1,B_1,C_1,D_1,E_1 保险闸被切断分别为事件 A,B,C,D,E,则 $P(A)=\frac{1}{2}$,$P(B)=\frac{1}{3}$,$P(C)=\frac{1}{4}$,$P(D)=\frac{1}{5}$,$P(E)=\frac{1}{6}$,所以 A_1,B_1 所在线路畅通的概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,A错误;$D_1,E_1$ 所在线路畅通的概率为 $1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}=1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}$,C错误;$A_1,B_1,C_1$ 所在线路畅通的概率为 $1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$,B正确;根据上述分析可知,当开关合上时,整个电路畅通的概率为 $\frac{29}{30}\times\frac{5}{6}=\frac{29}{36}$,D正确.故选BD.

10. BD 【解析】因为 $f(x)=a\sin2x+\sqrt{3}\cos2x=\sqrt{a^2+3}\cdot\sin(2x+\varphi)$,其中 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+3}}$,$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+3}}$,所以 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,$f(x)_{\max}=\sqrt{a^2+3}$,又 $f(x)$ 的最大值是 $2\sqrt{3}$,所以 $\sqrt{a^2+3}=2\sqrt{3}$,又 $a>0$,所以 $a=3$,所以A错误,B正确;$f(x)=3\sin2x+\sqrt{3}\cos2x=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\frac{1}{2}\cos2x\right)=2\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,则 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=2\sqrt{3}\sin\Big[2\times$

$\left.\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=0$,所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$ 对称,所以 C 错误;当 $x\in(0,\pi)$ 时,$2x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right)$,令 $f(x)=2\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$,即 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$,所以 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$ 或 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$,得 $x=\frac{\pi}{2}$ 或 $x=\frac{5\pi}{6}$,所以 D 正确. 故选 BD.

11. AC 【解析】对于选项 A,由题可知 $SC=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$,则圆锥的侧面积为 $\pi\cdot OC\cdot SC=2\sqrt{3}\pi$,故正确;对于选项 B,连接 SB,在 $\triangle SAB$ 中,$SA=SB=2$,$0<AB<2\sqrt{3}$,则当 $AB=2$ 时,$\angle SAB=\frac{\pi}{3}$,故错误;对于选项 C,易知 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,$AB=BC=\sqrt{6}$,将 $\triangle SAB$ 沿直线 AB 旋转,使之与 $\triangle ABC$ 在同一个平面上,得到 $\triangle S_1AB$,如图①所示,当 S_1,E,C 三点共线时,$SE+CE$ 取得最小值 S_1C,此时,设 F 为线段 AB 的中点,连接 S_1F,则 $S_1F\perp AB$,$\sin\angle ABS_1=\frac{S_1F}{S_1B}=\frac{\sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$,则 $S_1C=\sqrt{BS_1^2+BC^2-2BS_1\cdot BC\cos\angle S_1BC}=\sqrt{4+6-2\times2\times\sqrt{6}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}+\angle ABS_1\right)}=\sqrt{10+2\sqrt{15}}$,故正确;对于选项 D,如图②所示,设截面为 $\triangle SMN$,Q 为线段 MN 的中点,连接 OQ,SQ,设 $MN=2a$,$a\in(0,\sqrt{3}]$,则 $S_{\triangle SMN}=\frac{1}{2}MN\times SQ=a\cdot\sqrt{1+OQ^2}=a\sqrt{1+3-a^2}=a\cdot\sqrt{4-a^2}\leqslant\frac{a^2+4-a^2}{2}=2$,当且仅当 $a=\sqrt{4-a^2}$,即 $a=\sqrt{2}$ 时等号成立,故错误. 故选 AC.

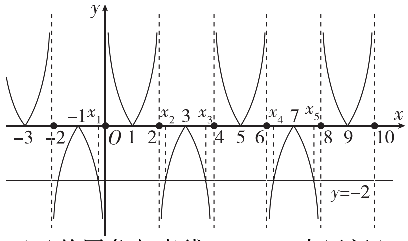


① ②

12. -60 【解析】$(x-2y+1)^5=[1+(x-2y)]^5$,则该二项式展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r\cdot1^{5-r}\cdot(x-2y)^r=C_5^r\cdot(x-2y)^r$,令 $r=3$,得 $T_4=C_5^3(x-2y)^3$. 二项式 $(x-2y)^3$ 的展开式的通项为 $T'_{r'+1}=C_3^{r'}\cdot x^{3-r'}\cdot(-2y)^{r'}$,令 $r'=1$,得 $T'_2=C_3^1\times(-2)$. 故 $(x-2y+1)^5$ 的展开式中含 x^2y 的项的系数为 $C_5^3\times C_3^1\times(-2)=-60$.

13. $x^2+(y-2)^2=8$ 【解析】抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 $(2,0)$,则 $C(0,2)$,点 C 到直线 $2x-y-3=0$ 的距离 $d=\frac{|-2-3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$,所以圆 C 的半径 $r=\sqrt{d^2+\frac{1}{4}|AB|^2}=\sqrt{5+3}=2\sqrt{2}$,故圆 C 的方程为 $x^2+(y-2)^2=8$.

14. $\frac{79}{4}$ 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)=f(2-x)$,所以 $f(0)=0$,函数 $f(x)$ 的周期为 4,且 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,因为当 $-1\leqslant x<0$ 时,$f(x)=\log_2(-x)$,所以可作出函数 $f(x)$ 的大致图象与直线 $y=-2$,如图所示,



由图易知 $f(x)$ 的图象与直线 $y=-2$ 在区间 $(-1,8)$ 内共有 5 个交点,设交点横坐标从小到大依次为 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,由 $\log_2(-x_1)=-2$,解得 $x_1=-\frac{1}{4}$,又 $\frac{x_2+x_3}{2}=3$,$\frac{x_4+x_5}{2}=7$,故 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=-\frac{1}{4}+20=\frac{79}{4}$,即函数 $g(x)$ 在区间 $(-1,8)$ 内的所有零点之和为 $\frac{79}{4}$.

训练 34 8 单选 + 3 多选 + 3 填空

1. D 【解析】由不等式 $x^2-2x-3<0$,解得 $-1<x<3$,即 $B=(-1,3)$,$\because A=\{-1,0,1,2,3\}$,$\therefore A\cap B=\{0,1,2\}$. 故选 D.

2. C 【解析】设数学成绩为 X,$\because$ 数学成绩 X 服从正态分布 $N(120,10^2)$,$P(|X-\mu|<\sigma)\approx0.682\ 7$,$\therefore P(|X-120|<10)\approx0.682\ 7$,根据正态曲线的对称性知,在 130 分以上的概率为 $\frac{1}{2}\times(1-0.682\ 7)=0.158\ 65$,$\therefore$ 理论上说,在 130 分以上的人数为 $0.158\ 65\times40\approx6$. 故选 C.

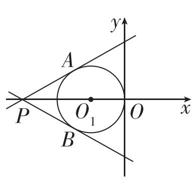
3. A 【解析】若 $n>m>0$,则方程 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+\frac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆;反之,若方程 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+\frac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆,则 $\frac{1}{m}>\frac{1}{n}>0$,即 $n>m>0$. 所以"$n>m>0$"是"方程 $mx^2+ny^2=1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆"的充要条件. 故选 A.

4. B 【解析】易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,由题可知 $f(1)=-2$,$f'(1)=0$,而 $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}$,所以 $b=-2$,$a-b=0$,即 $a=-2$,$b=-2$,所以 $f'(x)=-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}$,因此函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,所以当 $x=1$ 时 $f(x)$ 取得极大值,即最大值,满足题意,所以 $f'(2)=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$. 故选 B.

5. B 【解析】因为函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$,函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$,所以把函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度即可得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象,故选 B.

6. B 【解析】因为 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$,$\overrightarrow{CN}=\lambda\overrightarrow{ND}$,所以 $\overrightarrow{AM}=\lambda(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM})$,所以 $\overrightarrow{MA}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{BA}$,同理 $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{DC}$,所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{DC}=-\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,又因为 $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,所以 $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}=-\frac{1}{2}$,解得 $\lambda=3$. 故选 B.

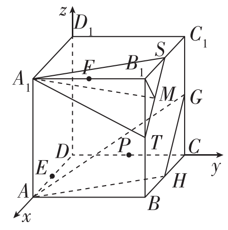
7. D 【解析】设过点 P 的切线方程为 $y=k(x+3)$,



$\therefore\frac{|-k+3k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$,$\therefore k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,不妨令直线 AP 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+3)$,即 $x-\sqrt{3}y+3=0$,则直线 PB 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+3)$,即 $x+\sqrt{3}y+3=0$,由 $\odot O_2$:$(x-1)^2+(y-t)^2=1$ 处于 $\odot O_1$ 的"背面",可得 $\odot O_2$ 与 PB 相切时 t 取最小值,由 $\frac{|1+\sqrt{3}t+3|}{\sqrt{1+3}}=1$,解得 $t=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $t=-2\sqrt{3}$,结合图形可得 t 的最小值为 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$,同理 $\odot O_2$ 与 PA 相切时可得 t 的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$,$\therefore-\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant t\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选 D.

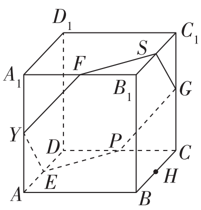
8. C 【解析】如图①所示建立空间直角坐标系. 对于 A 选项,可设 $Q(0,0,m)(m\in[0,2])$,而 $B(2,2,0)$,$C_1(0,2,2)$,$\therefore\overrightarrow{QB}=(2,2,-m)$,$\overrightarrow{QC_1}=(0,2,2-m)$,$\therefore\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QC_1}=4-$

$2m+m^2$,令 $4-2m+m^2=0$,整理得 $(m-1)^2+3=0$,此方程无解,故 A 错误;如图①所示,分别取 BB_1,B_1C_1 的中点 T,S,连接 A_1S,A_1T,ST,易证平面 A_1ST // 平面 GHA,则 M 在线段 ST 上,连接 A_1M,B_1M,由正方体的性质可知 A_1M 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 $\angle A_1MB_1$,且 $\cos\angle A_1MB_1=\frac{B_1M}{A_1M}=\frac{B_1M}{\sqrt{4+B_1M^2}}=\sqrt{1-\frac{4}{B_1M^2+4}}$,显然 B_1M 越大 $\cos\angle A_1MB_1$ 越大,$B_1M\leqslant B_1S=B_1T=1$,所以 $\cos\angle A_1MB_1\leqslant\frac{\sqrt5}{5}$,故 B 错误;

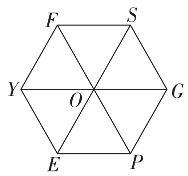


①

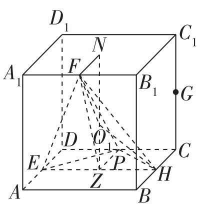
如图②所示,取 AA_1 的中点 Y,顺次连接 E,P,G,S,F,Y,易知面 $EPGSFY$ 为该截面,且是正六边形,如图③,设正六边形的中心为 O,连接 OS,OG,OP,OE,OY,OF,则将正六边形分割为六个正三角形,故 $S_{正六边形EPGSFY}=\frac{\sqrt3}{4}\times(\sqrt2)^2\times6=3\sqrt3$,故 C 正确;对于 D 选项,如图④,易证 $\triangle EPH$ 为等腰直角三角形,则其外接圆圆心为 EH 的中点 Z,过 Z 作 $ZN\perp$ 平面 EPH,交平面 A_1C_1 于 N,则 N 为四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心,三棱锥 F-EPH 的外接球球心 O_1 在直线 ZN 上,连接 NF,O_1F,O_1H,设外接球的半径为 R,$O_1Z=t$,则 $O_1F^2=FN^2+NO_1^2=O_1H^2=O_1Z^2+ZH^2\Rightarrow1+(2-t)^2=t^2+1\Rightarrow t=1$,$R=\sqrt2$,故外接球的体积 $V=\frac43\pi R^3=\frac{8\sqrt2}{3}\pi$,故 D 错误. 故选 C.



②



③



④

9. ABC 【解析】因为 $a_1=1$,$a_{n+1}=\frac{a_n}{1-2a_n}$,所以 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1-2a_n}{a_n}=\frac{1}{a_n}-2$,所以 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=-2$,又 $\frac{1}{a_1}=1$,所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列,且该数列的首项为1,公差为−2,所以 $\frac{2}{a_{10}}=\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_{18}}$,所以选项 A,B 正确;因为 $\frac{1}{a_n}=1-2(n-1)=3-2n$,所以 $a_n=\frac{1}{3-2n}$,所以 $b_n=a_na_{n+1}=\frac{1}{(3-2n)(1-2n)}=\frac{1}{(2n-3)(2n-1)}=\frac12\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)$,所以 $S_n=\frac12\left[\left(\frac{1}{-1}-\frac11\right)+\left(\frac11-\frac13\right)+\left(\frac13-\frac15\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-5}-\frac{1}{2n-3}\right)+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)\right]=\frac12\left(-1-\frac{1}{2n-1}\right)<-\frac12$,所以选项 C 正确,D 错误. 故选 ABC.

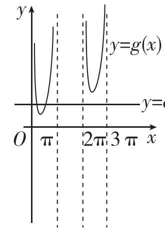
10. AD 【解析】由题意知,与两圆均有公共点,且斜率最大的直线恰为两圆的那条斜率为正的内公切线,由两圆半径之比为 1∶3,$|I_1I_2|=5$,可知该切线与 x 轴交于 $M\left(\frac54,0\right)$,设该切线的倾斜角为 θ,显然 $\theta\neq0$,则 $\sin\theta=\frac{3}{|MI_2|}=\frac{3}{\frac34\times5}=\frac45$,又 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,∴该切线的斜率 $k=\tan\theta=\frac43$,故选项 A 正确. 与圆 I_1,圆 I_2 均有公共点的圆的圆心不确定,所以半径可以任意大(无最大值),故选项 B 错误. 向圆 I_1,圆 I_2 引切线,设切线长相等的点为 $P(x,y)$,则 $|PI_1|^2-1^2=|PI_2|^2-3^2$,所以 $x^2+y^2-1=(x-5)^2+y^2-3^2$,化简得 $x=\frac{17}{10}$,故选项 C 错误. 设点 P 向圆 I_1 引两切线所得的角等于点 P 向圆 I_2 引两切线所得的角,可得 $\frac{|PI_1|}{|PI_2|}=\frac13$,设 $P(x,y)$,则 $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-5)^2+y^2}}=\frac13\Rightarrow x^2+y^2+\frac54x-\frac{25}{8}=0$,可得点 P 的轨迹是一个圆,故选项 D 正确. 故选 AD.

11. CD 【解析】对于 A,由题设条件得 $f(3+x)+2(3+x)=f(3-x)+2(3-x)$,令 $g(x)=f(x)+2x$,有 $g(3+x)=g(3-x)$,则 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称,因为 $f(1-2x)+f(1+2x)=4$,所以 $f(1-2x)+2(1-2x)+f(1+2x)+2(1+2x)=8$,即 $g(1-2x)+g(1+2x)=8$,则 $g(x)$ 的图象关于点 $(1,4)$ 对称,所以 $g(x)+g(2-x)=8$,又 $g(3+x)=g(3-x)$,所以 $g(4+x)=g(2-x)$,所以 $g(x)+g(4+x)=8$,所以 $g(4+x)+g(8+x)=8$,所以 $g(x+8)=g(x)$,所以 8 为 $g(x)$ 的一个周期,即 $f(x+8)+2(x+8)=f(x)+2x$,则 $f(x+8)=f(x)-16$,故 A 不正确;对于 B,由上知 $g(x)$ 的图象关于点 $(1,4)$ 对称,关于直线 $x=3$ 对称,不妨设 $g(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)+4$,符合题意,而 $f(2)=g(2)-4\neq4$,故 B 不正确;对于 C,因为 $f(2x+1)$ 的图象关于点 $(0,2)$ 对称,所以 $f(-2x+1)+f(2x+1)=4$,则 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,2)$ 对称,故 C 正确;对于 D,因为 $g(x)$ 的图象关于点 $(1,4)$ 对称,所以 $g(1)=4$,故 $g(2025)=g(8\times253+1)=g(1)=4$,则 $f(2025)=-4046$,故 D 正确. 故选 CD.

12. $2\sqrt2+2$ 【解析】由 $a>1$,得 $b=\frac{1}{a-1}>0$,所以 $2a+b=2a+\frac{1}{a-1}=2(a-1)+\frac{1}{a-1}+2\geqslant2\sqrt{2(a-1)\cdot\frac{1}{a-1}}+2=2\sqrt2+2$,当且仅当 $2(a-1)=\frac{1}{a-1}$,即 $a=1+\frac{\sqrt2}{2}$ 时取等号.

13. 1 【解析】由题知,二项展开式的通项为 $T_{r+1}=C_n^r(\sqrt[5]{x})^{n-r}\left(-\frac1x\right)^r=(-1)^rC_n^rx^{\frac{n-6r}{5}}$,因为第 4 项为常数项,所以当 $r=3$ 时,$\frac{n-18}{5}=0$,所以 $n=18$,则 $7^{18}=(9-2)^{18}=C_{18}^0\times9^{18}-C_{18}^1\times9^{17}\times2+C_{18}^2\times9^{16}\times2^2-\cdots-C_{18}^{17}\times9\times2^{17}+C_{18}^{18}\times2^{18}=9\times(C_{18}^0\times9^{17}-C_{18}^1\times9^{16}\times2+C_{18}^2\times9^{15}\times2^2-\cdots-C_{18}^{17}\times2^{17})+C_{18}^{18}\times2^{18}$,而 $2^{18}=8^6=(9-1)^6=C_6^0\times9^6-C_6^1\times9^5+C_6^2\times9^4-C_6^3\times9^3+C_6^4\times9^2-C_6^5\times9+C_6^6=9\times(C_6^0\times9^5-C_6^1\times9^4+C_6^2\times9^3-C_6^3\times9^2+C_6^4\times9-C_6^5)+C_6^6$,1 除以 9 的余数为 1,所以 7^n 除以 9 的余数为 1.

14. $\left(\sqrt2e^{\frac{\pi}{4}},\sqrt2e^{\frac{9\pi}{4}}\right)$ 【解析】因为函数 $f(x)=e^x-a\sin x(x>0,a>0)$ 有两个零点,所以方程 $e^x-a\sin x=0(x>0,a>0)$ 有两个根,所以 $x\in(2k\pi,2k\pi+\pi)$,$k\in\mathbf{N}$,所以方程 $\frac{e^x}{\sin x}=a$,其中 $x\in(2k\pi,2k\pi+\pi)$,$k\in\mathbf{N}$ 有两个根,设 $g(x)=\frac{e^x}{\sin x}$,$x\in(2k\pi,2k\pi+\pi)$,$k\in\mathbf{N}$,所以 $g'(x)=\frac{e^x\sin x-e^x\cos x}{\sin^2x}$,令 $g'(x)=0$,可得 $e^x\sin x-e^x\cos x=0$,则 $x=\frac{\pi}{4}+k_1\pi$,$k_1\in\mathbf{N}$,所以当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时,$g'(x)<0$,函数 $g(x)$ 单调递减,当 $\frac{\pi}{4}<x<\pi$ 时,$g'(x)>0$,函数 $g(x)$ 单调递增……作出函数 $g(x)$ 的大致图象,如图,由图象可得,当 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)<a<g\left(\frac{9\pi}{4}\right)$ 时,直线 $y=a$ 与函数 $g(x)=\frac{e^x}{\sin x}$,$x\in(2k\pi,2k\pi+\pi)$,$k\in\mathbf{N}$ 的图象有且仅有两个交点,所以当 $\sqrt2e^{\frac{\pi}{4}}<a<\sqrt2e^{\frac{9\pi}{4}}$ 时,函数 $f(x)=e^x-a\sin x(x>0,a>0)$ 有两个零点.



训练 35　8 单选+3 多选+3 填空

1. A 【解析】因为 $(4+3i)z=-i$,所以 $z=\frac{-i}{4+3i}=\frac{-i(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=-\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i$,所以 z 的虚部为 $-\frac{4}{25}$. 故选 A.

2. A 【解析】根据等比数列的性质，若 $m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$，则 $m+n=p+q\Rightarrow a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$，充分性成立；设等比数列$\{a_n\}$为常数列 $1,1,1,1,\cdots$，则数列$\{a_n\}$中任意两项的积相等，但项数和不一定相等，必要性成立. 综上可知，若 $m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$，则"$m+n=p+q$"是"$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$"的充分不必要条件，故选 A.

3. A 【解析】因为 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BE}$，所以 $\overrightarrow{CE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$，所以 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$. 故选 A.

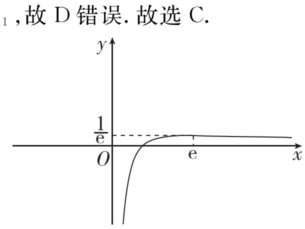
4. C 【解析】$\left(\frac{\sin\theta}{x}-x+1\right)^6$ 的展开式中含 x^4 的项可由 6 个因式$\left(\frac{\sin\theta}{x}-x+1\right)$中选取 5 个因式提供 $-x$，余下 1 个因式提供$\frac{\sin\theta}{x}$或者 6 个因式$\left(\frac{\sin\theta}{x}-x+1\right)$中选取 4 个因式提供 $-x$，余下 2 个因式均提供 1 得到，故 x^4 的系数为 $C_6^4-C_6^5\cdot\sin\theta=12$，$\therefore\sin\theta=\frac{1}{2}$，$\therefore\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$. 故选 C.

5. D 【解析】设甲、乙两个圆锥的母线长都为 l，底面半径分别为 r_1,r_2，侧面展开图的圆心角分别为 α,β，则 $\alpha+\beta=2\pi$，则 $\frac{S_甲}{S_乙}=\frac{\frac{1}{2}\alpha l^2}{\frac{1}{2}\beta l^2}=\frac{\alpha}{\beta}=2$，故 $\alpha=2\beta$，所以 $\alpha=\frac{4\pi}{3}$，$\beta=\frac{2\pi}{3}$，又 $2\pi r_1=\alpha l$，所以 $r_1=\frac{\alpha l}{2\pi}=\frac{2}{3}l$，同理 $r_2=\frac{\beta l}{2\pi}=\frac{1}{3}l$，故$\frac{h_甲}{h_乙}=\frac{\sqrt{l^2-r_1^2}}{\sqrt{l^2-r_2^2}}=\frac{\sqrt{l^2-\left(\frac{2}{3}l\right)^2}}{\sqrt{l^2-\left(\frac{1}{3}l\right)^2}}=\sqrt{\frac{5}{8}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$. 故选 D.

6. B 【解析】因为 $0<x<1<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\sin x<x<\tan x$，所以 $0<\frac{\sin x}{x}<1$，所以$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2<\frac{\sin x}{x}$. 设函数 $\varphi(x)=\frac{\sin x}{x}$ $(0<x<1)$，则 $\varphi'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{(x-\tan x)\cos x}{x^2}<0$ 在$(0,1)$上恒成立，因此 $\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递减，因为 $0<x<1$，所以 $0<x^2<x<1$，则 $\varphi(x^2)>\varphi(x)$，即 $\frac{\sin x^2}{x^2}>\frac{\sin x}{x}$. 综上，$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2<\frac{\sin x}{x}<\frac{\sin x^2}{x^2}$. 故选 B.

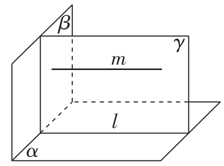
7. C 【解析】因为 $S_{1999}=S_{2023}$，$S_{1999}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{1999}$，$S_{2023}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{1999}+a_{2000}+\cdots+a_{2023}$，所以 $a_{2000}+a_{2001}+a_{2002}+\cdots+a_{2023}=\frac{24(a_{2000}+a_{2023})}{2}=0$，即 $a_{2000}+a_{2023}=a_{2011}+a_{2012}=0$，又因为 $a_1<0$，所以 $a_{2011}<0$，$a_{2012}>0$，所以 $d>0$，故 A，B 错误；$S_{4022}=\frac{4022(a_1+a_{4022})}{2}=\frac{4022(a_{2011}+a_{2012})}{2}=0$，故 C 正确；因为 $a_{2011}<0$，$a_{2012}>0$，所以$(S_n)_{\min}=S_{2011}$，所以 $S_n\geqslant S_{2011}$，故 D 错误. 故选 C.

8. A 【解析】函数 $F(x)=f[f(x)]-x=2^{1+af(x)}-f(x)-x=2^{1+af(x)}-2^{1+ax}$，令 $F(x)=0$，得 $2^{af(x)}=2^{ax}$，即 $af(x)=ax$，又 $a>0$，所以函数 $F(x)$恰有两个零点，等价于 $f(x)=x$ 有两个解，即 $2^{1+ax}=2x$ 恰有两个解，即 $a\ln 2=\frac{\ln x}{x}$恰有两个解. 记函数 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令 $g'(x)>0$，解得 $0<x<\mathrm{e}$，令 $g'(x)<0$，解得 $x>\mathrm{e}$，所以 $g(x)$在$(0,\mathrm{e})$上单调递增，在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减，故 $g(x)_{\max}=g(\mathrm{e})=\frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}$，作出 $g(x)$的大致图象如图所示.

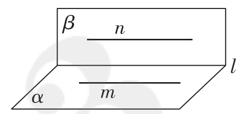


若 $a\ln 2=\frac{\ln x}{x}$恰有两个解，则 $a\ln 2\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$，故 $a\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}\ln 2}\right)$，故选 A.

9. AD 【解析】对于选项 A，过 m 作平面 γ 交平面 α 于 l，如图①，因为 $m/\!/\alpha$，所以 $m/\!/l$，而 $m\perp\beta$，所以 $l\perp\beta$，又 $l\subset\alpha$，所以 $\alpha\perp\beta$，选项 A 正确.



①



②

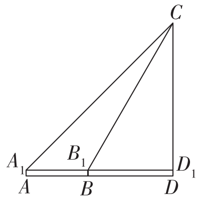
作 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$m/\!/l$，$n/\!/l$，如图②所示. 对于选项 B，如图②，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$m/\!/\beta$，$n/\!/\alpha$，符合题目条件，但 $\alpha/\!/\beta$ 不成立，选项 B 不正确. 对于选项 C，如图②，$\alpha\perp\beta$，$m/\!/\alpha$，$n/\!/\beta$，但此时 $m/\!/n$，选项 C 不正确. 对于选项 D，若 $m\subset\alpha$，$m/\!/\beta$，$\alpha\cap\beta=n$，则由线面平行的性质定理可得 $m/\!/n$，选项 D 正确. 故选 AD.

10. BC 【解析】$f(x)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$. 对于 A 选项，当 $x=\frac{\pi}{6}$时，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$，故 $f(x)$的图象不关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$对称，A 错误；对于 B 选项，当 $x=-\frac{\pi}{6}$时，$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=0$，故 $f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$对称，B 正确；对于 C 选项，当 $x\in\left[-\frac{2\pi}{3},0\right]$时，$x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$，因为正弦函数 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$上单调递增，所以 $f(x)$在区间$\left[-\frac{2\pi}{3},0\right]$上单调递增，C 正确；对于 D 选项，当 $x\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$时，$x+\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，此时 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\in(-1,2]$，D 错误. 故选 BC.

11. AD 【解析】因为 $f'(x)\cos x=[x+f(x)]\sin x$，所以 $f'(x)\cos x-f(x)\sin x=x\sin x$，设 $g(x)=f(x)\cos x$，则 $g'(x)=x\sin x$，因为 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $g'(x)=x\sin x\geqslant 0$ 恒成立，所以 $g(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，又因为 $f(0)=0$，所以 $g(0)=f(0)\cos 0=0$，所以当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$时，$g(x)<0$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$g(x)>0$. $f'(x)=\left[\frac{g(x)}{\cos x}\right]'=\frac{g'(x)\cos x+g(x)\sin x}{\cos^2 x}$. 当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$时，$g(x)<0$，$g'(x)>0$，$\cos x>0$，$\sin x<0$，故 $f'(x)>0$ 恒成立；当 $x=0$ 时，$f'(0)=0$；当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$g(x)>0$，$g'(x)>0$，$\cos x>0$，$\sin x>0$，故 $f'(x)>0$ 恒成立. 所以 $f'(x)\geqslant 0$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上恒成立，故 $f(x)$在

$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，则 $f(x)$ 没有最大值，没有极值. 故选 AD.

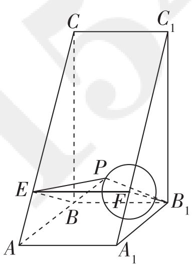
12. 42 **[解析]** 根据题意作图，如图，$A_1B_1=17$ m，因为 $\angle CA_1D_1=45°$，$\angle CB_1D_1=60°$，所以 $\angle A_1CB_1=15°$，在 $\triangle A_1B_1C$ 中，由正弦定理得 $\frac{A_1B_1}{\sin\angle A_1CB_1}=\frac{CB_1}{\sin\angle CA_1D_1}$，所以 $CB_1=\frac{A_1B_1\sin\angle CA_1D_1}{\sin\angle A_1CB_1}=\frac{17\sin 45°}{\sin 15°}$ (m)，又



$\sin 15°=\sin(60°-45°)=\sin 60°\cos 45°-\cos 60°\sin 45°=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，所以 $CB_1=\frac{17\sin 45°}{\sin 15°}=\frac{17\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=17(\sqrt{3}+1)$(m)，$CD_1=CB_1\sin 60°=\frac{17(3+\sqrt{3})}{2}\approx\frac{17\times 4.732}{2}\approx 40.2$(m)，又 $DD_1=1.7$ m，所以 $CD\approx 40.2+1.7=41.9$(m)，故该塔的高度约为 42 m.

13. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$ **[解析]** 设直线 l 的倾斜角为 $\theta(0\leqslant\theta<\pi)$，因为点 $P(1,2)$ 在抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$ 上，所以 $4=2p\times 1$，解得 $p=2$，所以抛物线 $E:y^2=4x$. 设过点 $M(1,0)$ 的直线 l 的方程为 $x=my+1$，由 $\begin{cases}x=my+1,\\y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x 并整理得 $y^2-4my-4=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，因为 $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$，所以 $-y_1=3y_2$，所以 $m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，则直线 l 的斜率 $k=\tan\theta=\frac{1}{m}=\pm\sqrt{3}$，又因为 $\theta\in[0,\pi)$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.

14. $\frac{52\sqrt{13}\pi}{3}$ $\sqrt{21}$ **[解析]** 由 $PB_1=\sqrt{13}$ 可得点 P 在以 B_1 为球心，以 $\sqrt{13}$ 为半径的球面上，所以所求几何体的体积为 $\frac{4}{3}\pi(\sqrt{13})^3=\frac{52\sqrt{13}\pi}{3}$. 过 B 作 $BE\perp AC$，垂足为 E，过点 B_1 作 $B_1F\perp A_1C_1$，垂足为 F，连接 EF，EP，易知 $EF /\!/ AA_1$，$EF=4$. 由 $BA\perp BC$，$AB=AA_1=4$，$BC=4\sqrt{3}$，可得 $BE=\frac{AB\cdot BC}{AC}=\frac{4\times 4\sqrt{3}}{\sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2}}=2\sqrt{3}$，同理可得 $B_1F=2\sqrt{3}$，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$A_1A\perp$ 平面 ABC，$BE\subset$ 平面 ABC，所以 $A_1A\perp BE$，又 $A_1A\cap AC=A$，A_1A，$AC\subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $BE\perp$ 平面 AA_1C_1C，因为 $EP\subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $BE\perp EP$，所以 $BP=\sqrt{EB^2+EP^2}=\sqrt{12+EP^2}$，因为 $PB_1=\sqrt{13}$，所以点 P 在以 B_1 为球心，以 $\sqrt{13}$ 为半径的球截平面 AA_1C_1C 所得的截面圆的圆周上，该截面圆的半径 $r=\sqrt{(\sqrt{13})^2-(2\sqrt{3})^2}=1$，圆心为 F，因此 $EP_{\min}=4-r=3$，故 $BP_{\min}=\sqrt{12+EP_{\min}^2}=\sqrt{12+9}=\sqrt{21}$.



训练 36 8 单选+3 多选+3 填空

1. A **[解析]** $\because z=\frac{(-1+i)^2}{1+i}=\frac{-2i}{1+i}=-1-i$，$\therefore|z+2|=|1-i|=\sqrt{2}$. 故选 A.

2. B **[解析]** 因为 $A=\{x\mid x^2<2x\}=\{x\mid 0<x<2\}$，$B=\{x\mid\log_2(x-1)<1\}=\{x\mid 1<x<3\}$，所以 $A\cap B=\{x\mid 1<x<2\}$. 故选 B.

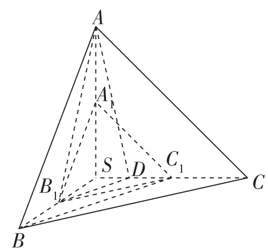
3. B **[解析]** 若 $a_2+a_6=2a_4$，则数列 $\{a_n\}$ 不一定是等差数列，如 1，2，1，4，1，6，1，1，…. 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，则 $a_2+a_6=2a_4$. 所以"$a_2+a_6=2a_4$"是"数列 $\{a_n\}$ 为等差数列"的必要不充分条件. 故选 B.

4. C **[解析]** 因为 $X\sim N(110,100)$，所以 $\mu=110$，$\sigma=10$，所以 $P(X>120)=\frac{1-P(110-10\leqslant X\leqslant 110+10)}{2}\approx\frac{1-0.682\ 7}{2}=0.158\ 65$，所以本次数学考试的成绩在 120 分以上的学生约有 $500\times 0.158\ 65\approx 79$(人). 故选 C.

5. D **[解析]** 设 $A(0,2)$ 关于直线 $x+y=3$ 的对称点为 (a,b)，则 $\begin{cases}\frac{b-2}{a-0}=1,\\\frac{a}{2}+\frac{2+b}{2}=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=3,\end{cases}$ 圆 $x^2+y^2=2$ 的圆心为 $(0,0)$，半径 $r=\sqrt{2}$，所以"将军饮马"的最短路程为 $\sqrt{1^2+3^2}-\sqrt{2}=\sqrt{10}-\sqrt{2}$. 故选 D.

6. C **[解析]** 设 $|\overrightarrow{OM}|=r(0\leqslant r\leqslant 2)$，则 $|\overrightarrow{ON}|=2-r$，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OP})=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP}^2=r(2-r)\cos\frac{2\pi}{3}-r\times 2\times\cos\frac{\pi}{3}-(2-r)\times 2\times\cos\frac{\pi}{3}+4=\frac{1}{2}r^2-r+2=\frac{1}{2}(r-1)^2+\frac{3}{2}$，所以当 $r=1$ 时，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 取得最小值 $\frac{3}{2}$. 故选 C.

7. A **[解析]** 如图将正三棱台 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 补全为正三棱锥 $S\text{-}ABC$，因为 $AA_1\perp$ 平面 B_1BCC_1，即 $SA\perp$ 平面 SBC，所以根据正三棱锥的性质可得 $SB\perp$ 平面 SAC，$SC\perp$ 平面 SBA，所以 SA，SB，SC 两两垂直. 因为 $AB=2A_1B_1$，所以 B_1 为 SB 的中点，A_1 为 SA 的中点，故 C_1 为 SC 的中点. 取 SC_1 的中点 D，连接 B_1D，AD，则 $B_1D /\!/ BC_1$，所以 $\angle AB_1D$（或其补角）即为异面直线 AB_1 与 BC_1 所成的角. 不妨令 $SB=2$，则 $AB_1=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$AD=\sqrt{2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$，$B_1D=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，在 $\triangle AB_1D$ 中，由余弦定理得 $AD^2=AB_1^2+B_1D^2-2AB_1\cdot B_1D\cos\angle AB_1D$，即 $\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2=(\sqrt{5})^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-2\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\cos\angle AB_1D$，解得 $\cos\angle AB_1D=\frac{2}{5}$，所以异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{2}{5}$. 故选 A.



8. B **[解析]** 设 $g(x)=\frac{f(x)-1}{e^x}$，$\because f(x)>f'(x)+1$，即 $f'(x)-f(x)+1<0$，$\therefore g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)+1}{e^x}<0$，$\therefore g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，又 $f(2)=e^2+1$，$\therefore$ 不等式 $e^{-x}f(x)\geqslant e^{-x}+1$ 等价于 $\frac{f(x)-1}{e^x}\geqslant 1=\frac{f(2)-1}{e^2}$，即 $g(x)\geqslant g(2)$，$\therefore x\leqslant 2$，$\therefore$ 原不等式的解集为 $(-\infty,2]$. 故选 B.

9. BD **[解析]** 观察图象可知 $f(0)=A\sin\varphi=\frac{A}{2}$，解得 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，因为 $f(4)=-A$，所以由"五点法"作图知，$4\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$，解得 $\omega=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=A\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$.

对于 A,函数 $f(x)$的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=6$,故 A 错误;对于 B,令$\dfrac{\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $x=1+3k,k\in\mathbf{Z}$,所以函数 $f(x)$的图象的对称轴为直线 $x=1+3k,k\in\mathbf{Z}$,故 B 正确;对于 C,当 $x\in(-1,1)$时,$\dfrac{\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$,所以函数 $f(x)$在$(-1,1)$上单调递增,故 C 错误;对于 D,将 $f(x)$的图象向左平移 $\alpha(\alpha>0)$个单位长度,得到函数 $y=A\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{3}\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$的图象,依题意知$\dfrac{\pi}{3}\alpha+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+n\pi,n\in\mathbf{Z}$,解得 $\alpha=1+3n,n\in\mathbf{Z}$,又 $\alpha>0$,所以 α 的最小值为 1,故 D 正确.故选 BD.

10. BC **【解析】** 依题意得 $f(x+2)=-f(x)$,则 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,所以 4 是函数 $f(x)$的一个周期,故 A 错误;因为函数 $y=f(2-x)$是偶函数,所以 $f(2-x)=f(2+x)$,所以函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称,又 $f(x+2)=-f(x)$,所以 $f(2-x)=-f(x)$,即 $f(2-x)+f(x)=0$,所以函数 $f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称,故 B 正确;由 $f(2-x)=f(2+x)$,得 $f(-x)=f(4+x)=f(x)$,所以函数 $f(x)$为偶函数,故 C 正确;由 $f(x+2)+f(x)=0$,得 $f(x+3)+f(1+x)=0$,由 $f(2-x)=f(2+x)$,得 $f(3-x)=f(1+x)$,所以 $f(x+3)+f(3-x)=0$,所以函数 $f(x)$的图象关于点$(3,0)$对称,故 D 错误.故选 BC.

11. ABD **【解析】** 依题意得 $2^2=2p$,解得 $p=2$,即抛物线 W:$y^2=4x$,焦点 $F(1,0)$,准线方程为 $x=-1$,易知直线 l_1,l_2 与坐标轴不垂直,因为 $l_1\perp l_2,AM\perp l_1,AN\perp l_2$,所以四边形 $AMFN$ 为矩形,所以 $4=|AF|^2=|MF|^2+|MA|^2\geqslant 2|MF|\cdot|MA|$,当且仅当$|MF|=|MA|=\sqrt{2}$时取等号,所以 $S_{四边形AMFN}=|MF|\cdot|MA|\leqslant 2$,即四边形 $AMFN$ 的面积的最大值为 2,故 A 正确;因为$(|MF|+|MA|)^2=|MF|^2+|MA|^2+2|MF|\cdot|MA|\leqslant 8$,当且仅当$|MF|=|MA|=\sqrt{2}$时取等号,所以$|MF|+|MA|\leqslant 2\sqrt{2}$,所以四边形 $AMFN$ 的周长 $2(|MF|+|MA|)$的最大值为 $4\sqrt{2}$,故 B 正确;设直线 l_1 的方程为 $x=ty+1,t\neq 0,B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}x=ty+1,\\y^2=4x,\end{cases}$得 $y^2-4ty-4=0$,则 $y_1+y_2=4t$,则$|BC|=|BF|+|CF|=x_1+1+x_2+1=t(y_1+y_2)+4=4(t^2+1)$,同理得$|DE|=4\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)$,所以$\dfrac{1}{|BC|}+\dfrac{1}{|DE|}=\dfrac{1}{4(t^2+1)}+\dfrac{1}{4\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)}=\dfrac{1}{4(t^2+1)}+\dfrac{t^2}{4(t^2+1)}=\dfrac{1}{4}$,故 C 错误;$S_{四边形BDCE}=\dfrac{1}{2}|BC|\cdot|DE|=8(t^2+1)\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)=8\left(2+t^2+\dfrac{1}{t^2}\right)\geqslant 8\left(2+2\sqrt{t^2\cdot\dfrac{1}{t^2}}\right)=32$,当且仅当 $t=\pm 1$ 时取等号,所以四边形 $BDCE$ 的面积的最小值为 32,故 D 正确.故选 ABD.

12. -4 **【解析】** $(1+ax^2)(1+x)^6=(1+x)^6+ax^2(1+x)^6$,$(1+x)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r x^r$,令 $r=4$,得 $T_5=15x^4$,令 $r=2$,得 $T_3=15x^2$,所以$(1+ax^2)(1+x)^6$ 的展开式中 x^4 的系数为 $15+15a=-45$,解得 $a=-4$.

13. $y=\dfrac{2}{e}x+\dfrac{4}{e}$(或 $y=2x+2$,写出一个即可) **【解析】** 设公切线 l 与曲线 $y=2e^x$ 相切于点 $A(x_1,2e^{x_1})$,与曲线 $y=2\ln(x+2)$相切于点 $B(x_2,2\ln(x_2+2))$.由 $y=2e^x$,得 $y'=2e^x$,由 $y=2\ln(x+2)$,得 $y'=\dfrac{2}{x+2}$,令 $2e^{x_1}=\dfrac{2}{x_2+2}$,得 $x_2+2=e^{-x_1}$,因为$\dfrac{2\ln(x_2+2)-2e^{x_1}}{x_2-x_1}=2e^{x_1}$,即 $2\ln(x_2+2)-2e^{x_1}=2e^{x_1}(x_2-x_1)$,即 $\ln e^{-x_1}-e^{x_1}=e^{x_1}(e^{-x_1}-2-x_1)$,所以$(x_1+1)(e^{x_1}-1)=0$,解得 $x_1=-1$ 或 $x_1=0$.当 $x_1=-1$ 时,切线 l 的斜率 $k=\dfrac{2}{e}$,$A\left(-1,\dfrac{2}{e}\right)$,此时切线 l 的方程为 $y-\dfrac{2}{e}=\dfrac{2}{e}(x+1)$,即 $y=\dfrac{2}{e}x+\dfrac{4}{e}$.当 $x_1=0$ 时,切线 l 的斜率 $k=2$,$A(0,2)$,此时切线 l 的方程为 $y-2=2(x-0)$,即 $y=2x+2$.综上可知,切线 l 的方程为 $y=\dfrac{2}{e}x+\dfrac{4}{e}$或 $y=2x+2$.

14. 7 **【解析】** $2S_n=a_na_{n+1}$,当 $n\geqslant 2$ 时,$2S_{n-1}=a_{n-1}a_n$,两式相减可得 $2S_n-2S_{n-1}=a_na_{n+1}-a_{n-1}a_n(n\geqslant 2)$,即 $2a_n=a_na_{n+1}-a_{n-1}a_n(n\geqslant 2)$,因为数列$\{a_n\}$的各项都不为 0,所以 $a_{n+1}-a_{n-1}=2$,因为 $2a_1=2S_1=a_1a_2$,所以 $a_2=2$,所以数列$\{a_n\}$的奇数项是以 1 为首项,2 为公差的等差数列,所以 $a_{2m-1}=1+2(m-1)=2m-1(m\in\mathbf{N}^*)$;数列$\{a_n\}$的偶数项是以 2 为首项,2 为公差的等差数列,所以 $a_{2m}=2+2(m-1)=2m(m\in\mathbf{N}^*)$.综上,数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n$,所以$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{n}$,所以 $T_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.令 $P_n=T_{2n}-T_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$,则 $P_{n+1}=\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{2n+2}$,则 $P_{n+1}-P_n=\dfrac{1}{2n+2}+\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{n+1}>\dfrac{1}{2n+2}+\dfrac{1}{2n+2}-\dfrac{1}{n+1}=0$,则 $P_{n+1}>P_n$,所以 P_n 随着 n 的增大而增大,所以 P_n 在 $n=1$ 处取到最小值,最小值为 $P_1=T_2-T_1=\dfrac{1}{2}$.因为对一切 $n\in\mathbf{N}^*$,有 $T_{2n}-T_n>\dfrac{t}{16}$恒成立,所以$\dfrac{1}{2}>\dfrac{t}{16}$,解得 $t<8$,故 t 能取到的最大整数是 7.

训练 37 8 单选+3 多选+3 填空

1. B **【解析】** 因为 $A=\{x\in\mathbf{Z}|x^2-x-2\leqslant 0\}=\{-1,0,1,2\}$,$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 5\}$,所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$.故选 B.

2. A **【解析】** 若 $1,a_1,a_2,4$ 成等差数列,则 $4=1+3d$(d 为公差),解得 $d=1$,$\therefore a_1-a_2=-1$.若 $1,b_1,b_2,b_3,4$ 成等比数列,则 $b_2^2=1\times 4$,解得 $b_2=2$ 或 $b_2=-2$,易知 $1,b_2$ 的符号相同,$\therefore b_2=2$,$\therefore\dfrac{a_1-a_2}{b_2}=-\dfrac{1}{2}$.故选 A.

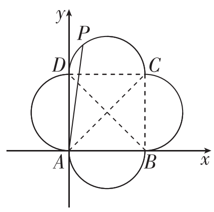
3. B **【解析】** 设 x_0 是关于 x 的方程 $x^2+zx+i=0$ 的实数根,则 $x_0^2+zx_0+i=0$,若 $x_0=0$,则 $i=0$,等式不成立,所以 $x_0\neq 0$,则 $z=-\dfrac{x_0^2}{x_0}-\dfrac{1}{x_0}i=-x_0-\dfrac{1}{x_0}i$,所以$|z|=\sqrt{(-x_0)^2+\left(-\dfrac{1}{x_0}\right)^2}=\sqrt{x_0^2+\dfrac{1}{x_0^2}}\geqslant\sqrt{2\sqrt{x_0^2\cdot\dfrac{1}{x_0^2}}}=\sqrt{2}$,当且仅当 $x_0^2=\dfrac{1}{x_0^2}$,即 $x_0=\pm 1$ 时等号成立,所以$|z|$的取值范围为$[\sqrt{2},+\infty)$.故选 B.

4. D **【解析】** 由题意,令 $x=1$,得到展开式的各项系数的和为 $1+a$,所以 $1+a=4$,解得 $a=3$,所以$\left(x+\dfrac{a}{x^3}\right)\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5=\left(x+\dfrac{3}{x^3}\right)\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5=x\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5+\dfrac{3}{x^3}\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5$,$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=(-1)^r2^{5-r}C_5^rx^{5-2r}$,令 $5-2r=-1$,得 $r=3$,令 $5-2r=3$,得 $r=1$,所以展开式中的常数项为$(-1)^3\times 2^{5-3}\times C_5^3+3\times(-1)\times 2^{5-1}\times C_5^1=-280$.故选 D.

5. B **【解析】** 由题易知 $f(x)$的定义域为$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$,因为 $f(x)$ 为偶函数,所以 $f(1)=f(-1)$,即$(1+a)\ln\dfrac{1}{3}=(-1+a)\ln 3$,解得 $a=0$,当 $a=0$ 时,$f(x)=$

$x\ln\frac{2x-1}{2x+1}$，则 $f(-x)=(-x)\ln\frac{2(-x)-1}{2(-x)+1}=(-x)\ln\frac{2x+1}{2x-1}=(-x)\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{-1}=x\ln\frac{2x-1}{2x+1}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数. 故选 B.

6. B 【解析】以 A 为坐标原点，AB，AD 所在直线分别为 x，y 轴建立如图所示的平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(2,0)$，设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x,y)$，$\overrightarrow{AB}=(2,0)$，由题易知 $-1\leqslant x\leqslant 3$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=2x\in[-2,6]$. 故选 B.

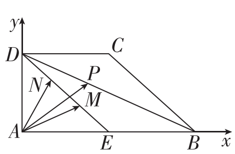


7. C 【解析】因为 $x\in\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$，所以 $\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3},\pi\omega+\frac{\pi}{3}\right]$，又 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ 上恰有 3 个零点，所以 $2\pi\leqslant\pi\omega+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{3}<4\pi$，解得 $3\leqslant\omega<6$，所以 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}\geqslant\frac{4\pi}{3}$. 要想保证 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ 上恰有 3 个零点，需满足① $\begin{cases}\pi+2k_1\pi<\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant 2\pi+2k_1\pi,\\ 4\pi+2k_1\pi\leqslant\pi\omega+\frac{\pi}{3}<5\pi+2k_1\pi,\end{cases}$ $k_1\in\mathbf{Z}$，令 $k_1=0$，解得 $\omega\in\left[\frac{11}{3},\frac{14}{3}\right)$；或② $\begin{cases}2k_2\pi<\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant\pi+2k_2\pi,\\ 2k_2\pi+3\pi\leqslant\pi\omega+\frac{\pi}{3}<2k_2\pi+4\pi,\end{cases}$ $k_2\in\mathbf{Z}$，令 $k_2=1$，解得 $\omega\in\left(5,\frac{17}{3}\right)$. 综上，$\omega$ 的取值范围是 $\left[\frac{11}{3},\frac{14}{3}\right)\cup\left(5,\frac{17}{3}\right)$. 故选 C.

8. D 【解析】由题意知 $\begin{cases}|PM|\cdot|MQ|=4\sqrt{3},\\ |PM|^2+|MQ|^2=16,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}|PM|=2,\\ |MQ|=2\sqrt{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|PM|=2\sqrt{3},\\ |MQ|=2\end{cases}$（舍），所以 $|PM|=2$，$|MQ|=2\sqrt{3}$，设 O 为坐标原点，在 $\triangle PMQ$ 中，因为 $|OM|=|PM|=|PO|=2$，所以 $\angle BPO=\angle POM=60°$，不妨设直线 l_1，l_2 的斜率大于零，则 $k_{AB}=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$k_{OM}=\tan 150°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 两式相减得 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$，即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{b^2}{a^2}$，即 $k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{1}{3}=-\frac{b^2}{a^2}$，所以 $\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{2}{3}$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 故选 D.

9. BC 【解析】圆的标准方程是 $(x-1)^2+(y-3)^2=10-a$，圆心为 $(1,3)$，半径 $r=\sqrt{10-a}$ $(a<10)$，圆心到已知直线的距离 $d=\frac{|3+12+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$，因为圆 $x^2+y^2-2x-6y+a=0$ 上至多有一点到直线 $3x+4y+5=0$ 的距离为 2，所以 $r=\sqrt{10-a}\leqslant 2$，可得 $6\leqslant a<10$. 故选 BC.

10. AB 【解析】如图，以 A 为坐标原点建立平面直角坐标系，不妨设 $AB=6$，$AD=3m$，$m>0$，则 $A(0,0)$，$B(6,0)$，$D(0,3m)$，$E(3,0)$，$M(2,m)$，$N(1,2m)$，则 $\overrightarrow{AM}=(2,m)$，$\overrightarrow{AN}=(1,2m)$，$\overrightarrow{BD}=(-6,3m)$，$\overrightarrow{AB}=(6,0)$. 设 $\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BD}$，$0\leqslant x\leqslant 1$，则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{BD}=(6-6x,3mx)$，因为 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{AN}$，所以 $(6-6x,3mx)=\lambda(2,m)+\mu(1,2m)=(2\lambda+\mu,m\lambda+2m\mu)$，即 $\begin{cases}6-6x=2\lambda+\mu,\\ 3mx=m\lambda+2m\mu,\end{cases}$ 整理得 $\lambda+\mu=2-x$，又 $x\in[0,1]$，所以 $\lambda+\mu=2-x\in[1,2]$. 故选 AB.



11. ABD 【解析】对于 A，在等边三角形 ACD 中，点 A 到直线 CD 的距离为 $a\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，故 A 正确；对于 B，取 CD 的中点 E，连接 AE，BE，过点 A 作 $AG\perp BE$ 交 BE 于点 G，则 $AE\perp CD$，$BE\perp CD$，又 $AE\cap BE=E$，AE，$BE\subset$ 平面 ABE，所以 $CD\perp$ 平面 ABE，又 $CD\subset$ 平面 BCD，所以平面 $BCD\perp$ 平面 ABE，又平面 $BCD\cap$ 平面 $ABE=BE$，$AG\perp BE$，$AG\subset$ 平面 ABE，所以 $AG\perp$ 平面 BCD，由正四面体的性质知 $BG=\frac{2}{3}BE=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AGB$ 中，$AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，故 B 正确；对于 C，由 B 中分析知，$AG\perp$ 平面 BCD，所以 $\angle ABG$ 即为直线 AB 与平面 BCD 所成的角，在 $\mathrm{Rt}\triangle AGB$ 中，$\cos\angle ABG=\frac{BG}{AB}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 C 错误；对于 D，取 BC 的中点 F，连接 AF，DF，则 $AF\perp BC$，$DF\perp BC$，又 $AF\subset$ 平面 ABC，$DF\subset$ 平面 BCD，平面 $ABC\cap$ 平面 $BCD=BC$，所以 $\angle AFD$ 即为二面角 $A\text{-}BC\text{-}D$ 的平面角，又 $AF=DF=a\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$AD=a$，所以由余弦定理得 $\cos\angle AFD=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-a^2}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{3}{2}a^2}=\frac{1}{3}$，所以二面角 $A\text{-}BC\text{-}D$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$，故 D 正确. 故选 ABD.

12. $\frac{5}{12}$ 【解析】甲、乙两名考生选科的样本空间包含 $(C_2^1\cdot C_4^2)^2=12^2=144$（个）样本点，其中恰有两门选考科目相同的情况有以下两种：①在物理、历史两科中选考科目相同，共有 $C_2^1\cdot C_4^1\cdot A_3^2=48$（个）样本点；②在物理、历史两科中选考科目不同，共有 $C_4^2\cdot A_2^2=12$（个）样本点. 因此甲、乙两名考生恰有两门选考科目相同的概率 $P=\frac{48+12}{144}=\frac{5}{12}$.

13. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 【解析】由题知 $|PF_1|+|PF_2|=|QF_1|+|QF_2|=2a$，且 $|PQ|=|QF_1|+|PF_1|$，令 $|PF_2|=5m$，则 $|PQ|=12m$，$|PF_1|=2a-5m$，所以 $|QF_1|=17m-2a$，$|QF_2|=4a-17m$，又 $PF_1\perp PF_2$，所以 $|PQ|^2+|PF_2|^2=|QF_2|^2$，即 $144m^2+25m^2=(4a-17m)^2$，整理得 $2a^2-17am+15m^2=(2a-15m)(a-m)=0$，解得 $a=\frac{15m}{2}$ 或 $a=m$（舍去），$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，即 $(2a-5m)^2+25m^2=4c^2$，即 $4a^2-20am+50m^2=4c^2$，因为 $a=\frac{15m}{2}$，所以 $c=\frac{5\sqrt{5}}{2}m$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

14. $\frac{\sqrt{21}}{2}$ 【解析】由 $2\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+3\overrightarrow{HC}=\mathbf{0}$，得 $2(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CA})+2(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CB})+3\overrightarrow{HC}=\mathbf{0}$，所以 $7\overrightarrow{CH}=2(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$，所以垂心 H 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中线上，所以 $a=b$. 因为 $2\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+3\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HA}+2(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AB})+3(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC})=\mathbf{0}$，所以 $7\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$，又 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{BC}=$

$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$,所以$(2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$,即$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}^2+3\overrightarrow{AC}^2-3\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,即$2\overrightarrow{AB}^2-3\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,所以$2c^2-3b^2+bc\cos A=0$,结合余弦定理得$2c^2-3b^2+bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=0$,即$5c^2=5b^2+a^2$,又$a=b$,所以$5c^2=6b^2$,所以$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2b^2-\frac{6}{5}b^2}{2b^2}=\frac{2}{5}$,又$C\in(0,\pi)$,所以$\sin C=\frac{\sqrt{21}}{5}$,所以$\tan C=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

训练38 8单选+3多选+3填空

1. A 【解析】$z=(1+\mathrm{i})\cdot(m-2\mathrm{i})=m+2+(m-2)\mathrm{i}$,其在复平面内对应的点的坐标为$(m+2,m-2)$,因为点$(m+2,m-2)$在第一象限,所以$\begin{cases}m+2>0,\\m-2>0,\end{cases}$解得$m>2$.故选A.

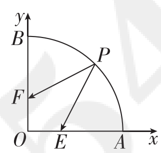
2. D 【解析】依题意,$A=\{x\mid x^2-3x>0\}=\{x\mid x<0$或$x>3\}$,则$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$,又$B=\{x\mid 1<2^x<16\}=\{x\mid 0<x<4\}$,故$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{x\mid 0<x\leqslant 3\}$.故选D.

3. B 【解析】由题意得$c=\log_3 2<1<b=\log_4 5<\log_4 6=\frac{\log_2 6}{\log_2 4}=\frac{2\log_2\sqrt{6}}{2}=\log_2\sqrt{6}=a$,即$c<b<a$.故选B.

4. D 【解析】由已知得$3\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=3(\sin\alpha-\cos\alpha)=\cos\alpha$,$\therefore\tan\alpha=\frac{4}{3}$,$\because\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\therefore\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\cos\alpha=\frac{3}{5}$,则$\sin\alpha+2\cos\alpha=2$.故选D.

5. C 【解析】由题易知$(1+x)$,$(1+x)^2$,$(1+x)^3$,$(1+x)^4$,$(1+x)^5$,$(1+x)^6$中只有$(1+x)^5$和$(1+x)^6$的展开式中有含x^5的项,且$(1+x)^5$的展开式中含x^5的项为x^5,$(1+x)^6$的展开式中含x^5的项为$\mathrm{C}_6^5x^5$,所以$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+(1+x)^6$的展开式中含$x^5$的项的系数是$1+\mathrm{C}_6^5=7$.故选C.

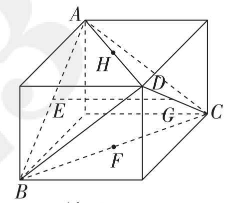
6. A 【解析】如图,以O为原点,OA,OB所在直线分别为x,y轴建立平面直角坐标系,则$A(2,0)$,$B(0,2)$,$E\left(\frac{2}{3},0\right)$,$F\left(0,\frac{2}{3}\right)$.设$P(x,y)$,$x,y\geqslant 0$,则$x^2+y^2=4$,所以$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=\left(\frac{2}{3}-x,-y\right)\cdot\left(-x,\frac{2}{3}-y\right)=x^2-\frac{2}{3}x+y^2-\frac{2}{3}y=4-\frac{2}{3}(x+y)$.因为$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4$,所以$(x+y)^2=4+2xy$,又$x^2+y^2\geqslant 2xy$,即$4\geqslant 2xy$,当且仅当$x=y=\sqrt{2}$时,等号成立,所以$0\leqslant xy\leqslant 2$,则$(x+y)^2$的最大值为8,所以$x+y$的最大值为$2\sqrt{2}$,即$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$的最小值为$4-\frac{4\sqrt{2}}{3}$.故选A.



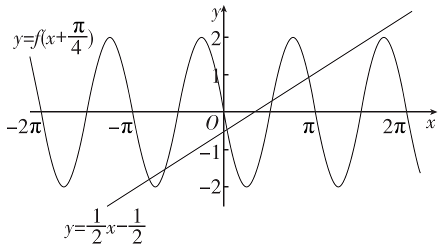
7. B 【解析】先分析5名医生到三个城市支援的情况,分两步:第一步,把5名医生分成三组,当按人数分成1,1,3三组时,有$\mathrm{C}_5^3\cdot\frac{\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{C}_1^1}{2}=10$(种)分法,当按人数分成1,2,2三组时,有$\mathrm{C}_5^1\cdot\frac{\mathrm{C}_4^2\cdot\mathrm{C}_2^2}{2}=15$(种)分法;第二步,把这三组分到三个城市,有$\mathrm{A}_3^3$种分法.故共有$(10+15)\times\mathrm{A}_3^3=150$(种)分法.再分析$A$城市恰好只有医生甲去支援的情况,分两步:第一步,把4名医生(不含医生甲)分成两组,当按人数分成1,3两组时,有$\mathrm{C}_4^1\cdot\mathrm{C}_3^3=4$(种)分法,当按人数分成2,2两组时,有$\frac{\mathrm{C}_4^2\cdot\mathrm{C}_2^2}{2}=3$(种)分法;第二步,把这两组分到两个城市(不含$A$城市),有$\mathrm{A}_2^2$种分法.故共有$(4+3)\times\mathrm{A}_2^2=14$(种)分法.因此所求概率$P=\frac{14}{150}=\frac{7}{75}$,故选B.

8. D 【解析】由$x\in(0,+\infty)$,得$x^{\frac{1}{x^2}}=a>0$,故$\frac{\ln x}{x^2}=\ln a$,要使原方程在$(0,+\infty)$上有两个不等实根,只需$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$的图象与直线$y=\ln a$有两个不同的交点.$f'(x)=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$,令$f'(x)>0$,得$0<x<\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$,令$f'(x)<0$,得$x>\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$,所以$f(x)$在$(0,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}})$上单调递增,在$(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}},+\infty)$上单调递减,故$f(x)_{\max}=f(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2\mathrm{e}}$.又当$x\to0^+$时,$f(x)\to-\infty$,当$x\to+\infty$时,$f(x)\to0$且$f(x)>0$,所以要使$f(x)$的图象与直线$y=\ln a$有两个不同的交点,只需$0<\ln a<\frac{1}{2\mathrm{e}}$,所以$1<a<\mathrm{e}^{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$.故选D.

9. BCD 【解析】对于A选项,连接EF,HG,因为E,F,G,H分别是所在棱的中点,所以$EF\mathbin{/\mkern-5mu/}AC\mathbin{/\mkern-5mu/}HG$,所以$E,F,G,H$共面,所以A错误;对于B选项,因为$BD=AC$,$BC=AD$,$CD=CD$,所以$\triangle ACD\cong\triangle BDC$,所以$\angle ACD=\angle BDC$,连接$AG$,$BG$,则$\triangle ACG\cong\triangle BDG$,所以$AG=BG$,又$E$是$AB$的中点,所以$EG\perp AB$,所以B正确;对于C选项,将等腰四面体$ABCD$补形为长方体,如图所示,则等腰四面体$ABCD$的外接球即为长方体的外接球,球心为线段$EG$的中点,所以截面为外接球的大圆,其面积为定值,所以C正确;对于D选项,易知$\triangle BAC\cong\triangle ABD$,所以$\angle BAC=\angle ABD$,易知$\triangle ADC\cong\triangle DAB$,所以$\angle CAD=\angle BDA$,所以$\angle BAC+\angle CAD+\angle DAB=\angle ABD+\angle BDA+\angle DAB=180^\circ$,所以D正确.故选BCD.



10. BC 【解析】由题意得$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)-\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)=2\cos\left(\omega x+\varphi+\frac{\pi}{3}\right)$,由$f(x)$为偶函数,$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,得$\varphi=-\frac{\pi}{3}$,则$f(x)=2\cos\omega x$,又$f(x)$的最小正周期为$\pi$,所以$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,即$\omega=2$,所以$f(x)=2\cos 2x$.将函数$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度,得到函数$g(x)=2\cos2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象,A错误;由$g(x)\geqslant1$得$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\geqslant\frac{1}{2}$,得$-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,所以$-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,B正确;由$g(x)=\frac{2}{3}$得$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$,所以$\cos\left(2x_1+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x_2+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$,又$x_1,x_2\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$,所以$2x_1+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$,$2x_2+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$,则$\frac{\left(2x_1+\frac{\pi}{3}\right)+\left(2x_2+\frac{\pi}{3}\right)}{2}=\pi$,所以$x_1+x_2=\frac{2\pi}{3}$,则$\sin(x_1+x_2)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,C正确;$f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin 2x$,作出$y=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象和直线$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$,如图,由图可知$y=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象与直线$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$有5个交点,D错误.故选BC.



11. ACD 【解析】由题意及正弦定理可知 $a:b:c=8:7:3$，设 $a=8k,b=7k,c=3k(k>0)$. 对于 A，由余弦定理可得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{8^2+3^2-7^2}{2\times8\times3}=\dfrac{1}{2}$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$，则 $A+C=\dfrac{2\pi}{3}=2B$，所以 A,B,C 构成等差数列，故 A 正确；对于 B，根据“海伦公式”得 $p=9k$，$S=\sqrt{9k\times k\times2k\times6k}=6\sqrt{3}k^2=12\sqrt{3}$，得 $k=\sqrt{2}$，所以 $a=8\sqrt{2},b=7\sqrt{2},c=3\sqrt{2}$，所以△$ABC$ 的周长为 $18\sqrt{2}$，故 B 错误；对于 C，设△ABC 内切圆的半径为 r，则 $\dfrac{1}{2}\times18\sqrt{2}r=12\sqrt{3}$，得 $r=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，所以△ABC 的内切圆面积为 $\pi r^2=\dfrac{8\pi}{3}$，故 C 正确；对于 D，设 BC 的中点为 D，则 $BD=4\sqrt{2}$，在△ABD 中，$AD=\sqrt{BD^2+AB^2-2AB\times BD\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}}=\sqrt{26}$，故D正确. 故选 ACD.

12. $\dfrac{4}{7}$ 【解析】由题意得 $S_{2023}-S_{2020}=a_{2023}+a_{2022}+a_{2021}=a_{2023}+\dfrac{a_{2023}}{2}+\dfrac{a_{2023}}{4}=\dfrac{7a_{2023}}{4}=1$，则 $a_{2023}=\dfrac{4}{7}$.

13. $[\pi,2\pi)$ 【解析】由 $f(x)=\cos(\sin x)-1$ 在 $[0,a]$ 上有两个零点，得 $\cos(\sin x)=1$ 在 $[0,a]$ 上有两个不同的实数根，所以当 $x\in[0,a]$ 时，$\sin x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 有两个不同的实数根，又因为 $\sin x\in[-1,1]$，所以 $\sin x=0$ 在 $[0,a]$ 上有两个不同的实数根，则 $a\in[\pi,2\pi)$.

14. $\dfrac{4}{e^2}+4$ 【解析】由 $\ln x=ye^x+\ln y$ 得 $\ln\dfrac{x}{y}=ye^x$，所以 $\dfrac{x}{y}\ln\dfrac{x}{y}=xe^x$，即 $xe^x=\ln\dfrac{x}{y}\cdot e^{\ln\frac{x}{y}}$（∗），因为 $x,y>0$，所以由（∗）知 $\ln\dfrac{x}{y}>0$. 设 $f(x)=xe^x(x>0)$，则 $f'(x)=e^x(x+1)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以由 $xe^x=\ln\dfrac{x}{y}\cdot e^{\ln\frac{x}{y}}$ 得 $x=\ln\dfrac{x}{y}$，所以 $y=\dfrac{x}{e^x}$，所以 $x(y-x+4)=x\left(\dfrac{x}{e^x}-x+4\right)=\dfrac{x^2}{e^x}-x^2+4x$. 设 $g(x)=\dfrac{x^2}{e^x}-x^2+4x(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{2x-x^2}{e^x}-2x+4=(2-x)\left(\dfrac{x}{e^x}+2\right)$，所以当 $0<x<2$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x>2$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，所以 $g(x)_{\max}=g(2)=\dfrac{4}{e^2}+4$，即 $x(y-x+4)$ 的最大值为 $\dfrac{4}{e^2}+4$.

训练 39 8 单选＋3 多选＋3 填空

1. C 【解析】依题意，$A=\{x\mid-|x|+4\geqslant0\}=\{x\mid-4\leqslant x\leqslant4\}$，$B=\{y\mid y=(x-1)^2+2\}=\{y\mid y\geqslant2\}$，因此 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{y\mid y<2\}$，所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x\mid-4\leqslant x<2\}$. 故选 C.

2. B 【解析】$|z^2+z|=|z(z+1)|=|z|\cdot|z+1|=|1-i|\cdot|2-i|=\sqrt{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{10}$. 故选 B.

3. B 【解析】因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|$，所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2$，即 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2$，则 $\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，又 $|\boldsymbol{b}|=2$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$. 故选 B.

4. C 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由题知 $a_1q\neq0$，由 $a_2,2a_5,3a_8$ 成等差数列，可得 $4a_5=a_2+3a_8$，即 $4a_1q^4=a_1q+3a_1q^7$，化简得 $3q^6-4q^3+1=0$，得 $q^3=\dfrac{1}{3}$ 或 $q^3=1$. 当 $q^3=1$，即 $q=1$ 时，$\dfrac{S_6}{S_3}=2$；当 $q^3=\dfrac{1}{3}$ 时，$\dfrac{S_6}{S_3}=\dfrac{1-q^6}{1-q^3}=1+q^3=\dfrac{4}{3}$. 所以 $\dfrac{S_6}{S_3}$ 的值为 2 或 $\dfrac{4}{3}$，故选 C.

5. B 【解析】因为 $e^{-x}-e^x=-(e^x-e^{-x})$，所以 $y=e^x-e^{-x}$ 为奇函数，又 $f(x)$ 的图象可由函数 $y=e^x-e^{-x}$ 的图象向右平移 1 个单位长度，再向上平移 4 个单位长度而得到，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,4)$ 对称. 易知直线 $y=kx+4-k$，即 $y=k(x-1)+4$ 也关于点 $(1,4)$ 对称，所以方程 $f(x)=kx+4-k$ 的三个实根 x_1,x_2,x_3 中必有一个为 1，不妨设 $x_2=1$，则点 $(x_1,f(x_1))$，$(x_3,f(x_3))$ 关于点 $(1,4)$ 对称，所以 $x_1+x_3=2$，则 $x_1+x_2+x_3=3$. 故选 B.

6. C 【解析】圆 $C:(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 的圆心为 $C(2,1)$，半径 $r=1$. 连接 PC，当直线 PM,PN 与圆 C 相切且 $\angle MPN=60^\circ$ 时，$|PC|=2r=2$. 以 $C(2,1)$ 为圆心，2 为半径的圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$，由 $\begin{cases}x-y+1=0,\\(x-2)^2+(y-1)^2=4,\end{cases}$ 消去 y 并化简得 $x^2-2x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=2$. 因为在圆 C 上存在两点 M,N，使得 $\angle MPN=60^\circ$，所以点 P 的横坐标的取值范围为 $[0,2]$. 故选 C.

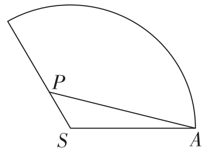
7. A 【解析】根据题意设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，将点 A,B 的坐标代入椭圆方程可得 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1,\\\dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 两式相减可得 $\dfrac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，整理可得 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$，又 AB 的中点坐标为 $(1,-1)$，所以 $x_1+x_2=2,y_1+y_2=-2$，因此 $k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{b^2}{a^2}$. 又点 $F(3,0)$ 和点 $(1,-1)$ 均在直线 AB 上，所以 $k_{AB}=\dfrac{-1-0}{1-3}=\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$，可得 $a^2=2b^2$. 易知 $c=3$，所以 $a^2=b^2+c^2=b^2+9$，可得 $a^2=18,b^2=9$，所以椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$，故选 A.

8. B 【解析】将函数 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度后，得到函数 $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}+\varphi\right)$ 的图象，因为该图象关于原点对称，所以 $2\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}+\varphi\right)=0$，可得 $-\dfrac{\pi}{4}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. 因为 $x\in[0,\pi)$，所以 $2x+\dfrac{\pi}{4}\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{9\pi}{4}\right)$，由 $f(x)=-\dfrac{1}{2}$，可得 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{4}$，由题意及 $f(x)$ 的图象可得 $2\alpha+\dfrac{\pi}{4}+2\beta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{2}\times2=3\pi$，且 $\sin\left(2\beta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{4}$，则 $\alpha+\beta=\dfrac{5\pi}{4}$，所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}-2\beta\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2\beta\right)=\dfrac{1}{4}$. 故选 B.

9. ABC 【解析】因为 $a>|b|\geqslant-b$，所以 $a>-b$，即 $a+b>0$，A 选项正确；因为 $a>|b|\geqslant b$，所以 $a>b$，又函数 $y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $a^3>b^3$，B 选项正确；因为 $a>b$，所以 $2a>a+b>0$，所以 $\dfrac{1}{a+b}>\dfrac{1}{2a}$，C 选项正确；由 $a>0$，$ab=-1$，得 $b<0$，则 $a-b>0$，$\dfrac{-b}{a}>0$，则 $\dfrac{-b}{a}+\dfrac{a}{-b}\geqslant2\sqrt{\dfrac{-b}{a}\cdot\dfrac{a}{-b}}=2$，

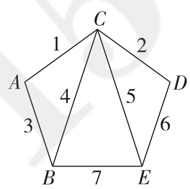
又 $a>-b$,所以等号不成立,则 $\frac{a-b}{a}-\frac{a-b}{b}=2+\frac{-b}{a}+\frac{a}{-b}>4$,所以 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>\frac{4}{a-b}$,D选项错误.故选ABC.

10. AC 【解析】由已知得 $\pi rl=3\pi$,则 $rl=3$.当 $r=1$ 时,$l=3$,此时圆锥的高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=2\sqrt{2}$,所以圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$,A正确;当 $r=\frac{3}{2}$ 时,$l=2$,此时圆锥的轴截面三角形为钝角三角形,故过顶点 S 和两条母线的截面三角形的最大面积为 $\frac{1}{2}l^2\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$,B错误;当 $r=1$ 时,$l=3$,作出圆锥的侧面展开图,如图,连接 AP,易知扇形的弧长为 2π,所以 $\angle ASP=\frac{2\pi}{3}$,在 $\triangle ASP$ 中,由余弦定理得 $AP=\sqrt{AS^2+SP^2-2AS\cdot SP\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{13}$,则一质点从点 A 绕圆锥侧面一周到达点 P 的最短距离为 $\sqrt{13}$,C正确;棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四面体的外接球半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,当 $l=3$ 时,$r=1$,此时圆锥 SO 的内切球半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,因为 $\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四面体在圆锥 SO 内不可以任意转动,D错误.故选AC.

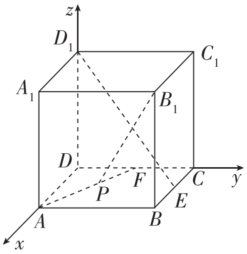


11. ABC 【解析】对于选项A,因为 $g(x)$ 是奇函数,所以 $g(x)+g(-x)=0$,即 $f(x+1)-1+f(-x+1)-1=0$,整理得 $f(x+1)+f(-x+1)=2$,所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,1)$ 对称,故A正确;对于选项B,因为 $f(x)$ 为偶函数,所以 $f(x)+f(x-2)=f(x)+f(2-x)=2$,所以 $f(x-2)+f(x-4)=2$,所以 $f(x)=f(x-4)$,即 $f(x)=f(x+4)$,故B正确;对于选项C,$F(x)+F(-x)=f(1-x)-1+f(1+x)-1=0$,所以 $F(x)$ 是奇函数,故C正确;对于选项D,因为 $F(-x)=g(x)$,所以 $F(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称,故D错误.故选ABC.

12. 32 【解析】如图,将五个景点抽象为五个点,将七个检票口抽象为七条路线(编号分别为1,2,3,4,5,6,7),将问题转化为不重复走完七条路线,即一笔画问题.从 B 或 E 处出发的路线有奇数条,从 A 或 C 或 D 处出发的路线有偶数条,可以判断只能从 B 或 E 处出发才能不重复走完七条路线,根据对称性,只列出从 B 处出发的路线即可.①走 BA 路线:3126547,3126745,3147526,3147625,3156247,3157426,共6种;②走 BC 路线:4137526,4137625,4265137,4267315,4562137,4573126,共6种;③走 BE 路线:7513426,7543126,7621345,7624315,共4种.综上,共有 $2\times(6+6+4)=32$(种)不同的检测顺序.



13. $\left[\frac{12\sqrt{5}}{5},6\right]$ 【解析】以 D 为原点,以 DA,DC,DD_1 所在的直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立空间直角坐标系,如图所示,则 $A(4,0,0)$,$B_1(4,4,4)$,$E(2,4,0)$,$D_1(0,0,4)$,设 $P(x,y,0)(0\leqslant x\leqslant4,0\leqslant y\leqslant4)$,则 $\overrightarrow{PB_1}=(4-x,4-y,4)$,$\overrightarrow{ED_1}=(-2,-4,4)$,又 $B_1P\perp D_1E$,所以 $\overrightarrow{PB_1}\cdot\overrightarrow{ED_1}=0$,即 $-2(4-x)-4\times(4-y)+4\times4=0$,则 $x+2y-4=0$,当 $y=0$ 时,$x=4$,当 $x=0$ 时,$y=2$,设 $F(0,2,0)$,连接 AF,则点 P 在线段 AF 上(包含端点).$|\overrightarrow{B_1P}|=\sqrt{(4-x)^2+(4-y)^2+4^2}=\sqrt{5y^2-8y+32}=\sqrt{5\left(y-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{144}{5}}$,$0\leqslant y\leqslant2$,当 $y=\frac{4}{5}$ 时,$|\overrightarrow{B_1P}|$ 取得最小值,$|\overrightarrow{B_1P}|_{\min}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$,当 $y=2$ 时,$|\overrightarrow{B_1P}|$ 取得最大值,$|\overrightarrow{B_1P}|_{\max}=6$,所以线段 B_1P 的长度的取值范围是 $\left[\frac{12\sqrt{5}}{5},6\right]$.



14. $-\frac{1}{3}$ 【解析】连接 OC,由题图知 $\angle BOC=2\angle BAC$,因为 $OB=OC$,所以 $\angle OBC=\angle OCB$.因为 $\angle OBC+\angle OCB+\angle BOC=\pi$,所以 $2\angle OBC+\angle BOC=\pi$,所以 $2\angle OBC=\pi-\angle BOC=\pi-2\angle BAC$.因为 $\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\cos2\angle OBC=\cos(\pi-2\angle BAC)=-\cos2\angle BAC=2\sin^2\angle BAC-1=2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-1=-\frac{1}{3}$.

训练40 8单选+3多选+3填空

1. A 【解析】由 $\frac{2}{x}<1$,得 $\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}<0$,即 $(2-x)x<0$,解得 $x<0$ 或 $x>2$,所以 $M=\{x\mid x<0$ 或 $x>2\}$.因为 $y=\sqrt{1-x}\geqslant0$,所以 $N=\{y\mid y\geqslant0\}$,故 $M\cup N=\mathbf{R}$.故选A.

2. A 【解析】因为 $-3+2\mathrm{i}$ 是关于 x 的方程 $x^2+mx+n=0$ $(m,n\in\mathbf{R})$ 的一个根,所以 $-3-2\mathrm{i}$ 也是该方程的根.由根与系数的关系可得 $\begin{cases}(-3+2\mathrm{i})(-3-2\mathrm{i})=n,\\(-3+2\mathrm{i})+(-3-2\mathrm{i})=-m,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}n=13,\\m=6,\end{cases}$ 所以 $m-n=6-13=-7$.故选A.

3. B 【解析】因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是相互垂直的单位向量,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=1$.又 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,所以 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{5}$,又 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=-1$,所以向量 $\overrightarrow{OA}$ 在向量 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{5}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}-\frac{2}{5}\boldsymbol{b}$.故选B.

4. B 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$,$a_2=-1$,$a_na_{n+2}=-1$,所以数列 $\{a_n\}$ 的奇数项构成首项为1,公比为 -1 的等比数列,偶数项构成首项为 -1,公比为 -1 的等比数列,则 $a_{2n-1}=(-1)^{n-1}$,$a_{2n}=(-1)^n$,所以 $a_{2n-1}a_{2n}=(-1)^{2n-1}=-1$,$a_{2n}a_{2n+1}=(-1)^{2n}=1$.由 $b_n=a_na_{n+1}$,得当 n 为奇数时,$b_n=-1$,当 n 为偶数时,$b_n=1$,所以数列 $\{b_n\}$ 的前10项和为0.故选B.

5. B 【解析】因为 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\beta$,所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\beta$,所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ 或 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$.因为 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$,$\beta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $\alpha+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$,$\frac{\pi}{2}-\beta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$,$\frac{\pi}{2}+\beta\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$,当 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ 时,$\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$,$\frac{\pi}{2}-\beta=\frac{\pi}{4}$,所以 $\alpha=\frac{\pi}{2}$,$\beta=\frac{\pi}{4}$;当 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$ 时,$\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\beta=\frac{3\pi}{4}$,所以 $\alpha=\frac{\pi}{2}$,$\beta=\frac{\pi}{4}$.综上,$\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$,$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$.故选B.

6. A 【解析】对于游戏1,甲获胜的概率为 $\frac{1}{2}$,游戏公平;对于

游戏 2,设两个红球为 A,B,两个白球为 a,b,依次取出 2 个球共包含 6 个样本点,分别为 AB,Aa,Ab,Ba,Bb,ab,其中两球同色包含 AB,ab 共 2 个样本点,共 34 个,故甲获胜的概率为 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,游戏不公平;对于游戏 3,设 3 个红球为 E,F,G,白球为 e,依次取出 2 个球共包含 6 个样本点,分别为 EF,EG,Ee,FG,Fe,Ge,其中两球同色包含的样本点为 EF,EG,FG,共 3 个,故甲获胜的概率为 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,游戏公平.故游戏 1 和游戏 3 公平,故选 A.

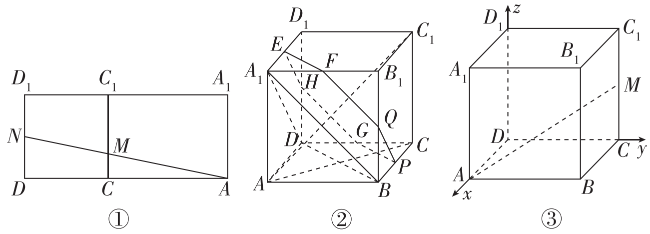
7. B 【解析】将点 $C\left(-b,\frac{a}{2}\right)$ 的坐标代入椭圆方程得 $\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{4b^2}=1$,令 $\frac{a^2}{b^2}=t$,则 $\frac{1}{t}+\frac{t}{4}=1$,解得 $t=2$,即 $\frac{a^2}{b^2}=2$,则 $\frac{a}{b}=\sqrt{2}$.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $\frac{x_1+x_2-b}{3}=0$,$\frac{y_1+y_2+\frac{a}{2}}{3}=0$,故 $x_1+x_2=b$,$y_1+y_2=-\frac{a}{2}$,由 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}=-\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}$,变形得到 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{b^2}{a^2}$,即 $k_l\cdot\frac{-\frac{a}{2}}{b}=-\frac{1}{2}$,故 $k_l\cdot\frac{a}{b}=1$,可得 $k_l=\frac{\sqrt{2}}{2}$.故选 B.

8. A 【解析】令函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$,则 $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant 0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,所以 $f(x)$ 单调递增,由 $f(1)=0$,可得当 $x\in(0,1)$ 时,$f(x)<0$,当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f(x)>0$.令 $x=\sqrt{a}$,则 $f(\sqrt{a})=\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}-2\ln\sqrt{a}=\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}-\ln a=\ln b-\ln a$,当 $0<\sqrt{a}<1$ 时,$f(\sqrt{a})<0$,即 $\ln b-\ln a<0$,所以 $b<a$;当 $\sqrt{a}>1$ 时,$f(\sqrt{a})>0$,即 $\ln b-\ln a>0$,所以 $b>a$.故 B,D 中不等式不一定成立.当 $0<\sqrt{a}<1$ 时,$\ln b<\ln a<0$,所以 $\frac{\ln b}{\ln a}>1$,由换底公式得 $\log_a b>1$;当 $\sqrt{a}>1$ 时,$\ln b>\ln a>0$,所以 $\frac{\ln b}{\ln a}>1$,得 $\log_a b>1$.所以 A 中不等式一定成立,C 中不等式不成立.故选 A.

9. BC 【解析】因为当且仅当 $n=12$ 时,S_n 取得最大值,所以 $a_1>0$,公差 $d<0$,且 $a_{12}>0$,$a_{13}<0$.所以 $S_{23}=\frac{23\times(a_1+a_{23})}{2}=23a_{12}>0$,$S_{24}=\frac{24\times(a_1+a_{24})}{2}=12(a_{12}+a_{13})$,$S_{25}=\frac{25\times(a_1+a_{25})}{2}=25a_{13}<0$,故当 $n\geqslant 25$ 时,$S_n<0$.当 $a_{12}+a_{13}>0$ 时,$S_{24}>0$,则满足 $S_k>0$ 的最大的正整数 k 的值为 24;当 $a_{12}+a_{13}\leqslant 0$ 时,$S_{24}\leqslant 0$,则满足 $S_k>0$ 的最大的正整数 k 的值为 23.故满足 $S_k>0$ 的最大的正整数 k 的值为 23 或 24.故选 BC.

10. BCD 【解析】对于 A,若从第一箱中任取 1 个节能灯,则该节能灯为次品的概率为 $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$,故 A 错误;对于 B,若从第一箱中任取 2 个节能灯,则至少有 1 个节能灯为次品的概率为 $1-\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{17}{45}$,故 B 正确;对于 C,若从两箱中各取出 1 个节能灯,则恰有一个是次品的概率为 $\frac{2}{10}\times\frac{9}{12}+\frac{8}{10}\times\frac{3}{12}=\frac{7}{20}$,故 C 正确;对于 D,若从两箱中随机取出 1 箱,再从该箱中随机取出 1 个节能灯,则该节能灯为次品的概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{12}=\frac{9}{40}$,故 D 正确.故选 BCD.

11. ACD 【解析】对于 A,连接 A_1C_1,AC,将矩形 ACC_1A_1 与正方形 CC_1D_1D 展开到一个平面内,如图①所示,若 $AM+MN$ 最小,则 A,M,N 三点共线,因为 $CC_1/\!/DD_1$,所以 $\frac{MC}{DN}=\frac{AC}{AD}=\frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+4}=2-\sqrt{2}$,则 $MC=(2-\sqrt{2})DN=\frac{2-\sqrt{2}}{2}CC_1$,即 $\frac{MC}{CC_1}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 A 正确.对于 B,当点 M 与点 C_1 重合时,连接 A_1D,BD,A_1B,AC,AC_1,如图②所示,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$CC_1\perp$ 平面 $ABCD$,$BD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $BD\perp CC_1$,又因为 $BD\perp AC$,且 $AC\cap CC_1=C$,AC,$CC_1\subset$ 平面 ACC_1,所以 $BD\perp$ 平面 ACC_1,又 $AC_1\subset$ 平面 ACC_1,所以 $BD\perp AC_1$,同理可得 $A_1D\perp AC_1$,因为 $A_1D\cap BD=D$,A_1D,$BD\subset$ 平面 A_1BD,所以 $AC_1\perp$ 平面 A_1BD,易知 $\triangle A_1BD$ 是边长为 $4\sqrt{2}$ 的等边三角形,其面积 $S_{\triangle A_1BD}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{2})^2=8\sqrt{3}$,周长为 $4\sqrt{2}\times 3=12\sqrt{2}$.设 E,F,Q,P,G,H 分别为 A_1D_1,A_1B_1,BB_1,BC,CD,DD_1 的中点,连接 EF,FQ,PQ,PG,HG,EH,易知六边形 $EFQPGH$ 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正六边形,且 $AC_1\perp$ 平面 $EFQPGH$,正六边形 $EFQPGH$ 的周长为 $12\sqrt{2}$,面积为 $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2})^2=12\sqrt{3}$,所以 $\triangle A_1BD$ 的面积小于正六边形 $EFQNGH$ 的面积,它们的周长相等,故 B 错误.对于 C,以点 D 为坐标原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图③所示的空间直角坐标系,则 $A(4,0,0)$,$B(4,4,0)$,设 $M(0,4,a)(0\leqslant a\leqslant 4)$,因为 $AM\perp$ 平面 α,所以 $\overrightarrow{AM}$ 是平面 α 的一个法向量,且 $\overrightarrow{AM}=(-4,4,a)$,$\overrightarrow{AB}=(0,4,0)$,故 $|\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\rangle|=\frac{16}{4\sqrt{a^2+32}}=\frac{4}{\sqrt{a^2+32}}\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$,所以直线 AB 与平面 α 所成角的正弦值的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$,则直线 AB 与平面 α 所成角的余弦值的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$,故 C 正确.对于 D,当点 M 与点 C 重合时,四面体 AMD_1B_1 即为四面体 ACD_1B_1,为正四面体,棱长为 $4\sqrt{2}$,设正四面体 ACD_1B_1 的高为 h,其内切球的半径为 r,则由等体积法可得 $\frac{1}{3}\times 4r\cdot S_{\triangle ACB_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACB_1}h$,由正四面体的性质可得 $h=\frac{8\sqrt{3}}{3}$,所以 $r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以内切球的表面积为 $4\pi r^2=\frac{16\pi}{3}$,故 D 正确.故选 ACD.



① ② ③

12. 4 【解析】由双曲线 $\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{m-2}=1(m>2)$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$,得 $\frac{\sqrt{m-2}}{\sqrt{m}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,解得 $m=4$,所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$,所以 $F_1(-\sqrt{6},0)$,$F_2(\sqrt{6},0)$.因为 F_1F_2

恰好为圆 $x^2+y^2=6$ 的直径,所以 $PF_1\perp PF_2$. 由双曲线的定义知,$||PF_1|-|PF_2||=4$,又 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=24$,所以 $2|PF_1||PF_2|=(|PF_1|^2+|PF_2|^2)-(|PF_1|-|PF_2|)^2=8$,所以 $|PF_1||PF_2|=4$.

13. 8 【解析】由题可知,$f(x)=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-1+\frac{2}{1+e^x}$是定义域为 $\mathbf{R}$ 的减函数,因为 $f(-x)=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{\frac{e^x-1}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}=\frac{e^x-1}{1+e^x}=-f(x)$,所以函数 $f(x)$ 为奇函数,又因为 $f(0)=\frac{1-e^0}{1+e^0}=0$,所以 $f(2m)+f(n-1)=f(0)=0$,即 $2m+(n-1)=0$,所以 $2m+n=1$. $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)(2m+n)=\frac{n}{m}+\frac{4m}{n}+4\geqslant 2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{4m}{n}}+4=8$,当且仅当 $\begin{cases}\frac{n}{m}=\frac{4m}{n},\\2m+n=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m=\frac{1}{4},\\n=\frac{1}{2}\end{cases}$ 时取等号. 所以$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$的最小值为 8.

14. 3 【解析】$\because a=c(\cos B+\sqrt{3}\cos C)$,∴由正弦定理得 $\sin A=\sin C(\cos B+\sqrt{3}\cos C)$,$\because \sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$,$\therefore \cos C\sin B=\sqrt{3}\sin C\cos C$,$\because$△$ABC$ 不是直角三角形,$\therefore \cos C\neq 0$,$\therefore \sin B=\sqrt{3}\sin C$,即 $b=\sqrt{3}c$,$\therefore S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}=\sqrt{\frac{1}{4}\left[9c^2-\left(\frac{c^2+9-3c^2}{2}\right)^2\right]}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-4c^4+72c^2-81}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{-c^4+18c^2-\frac{81}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{-(c^2-9)^2+\frac{243}{4}}$,当且仅当 $c^2=9$,即 $c=3$ 时,S 取得最大值.

训练 41 8 单选+3 多选+3 填空

1. C 【解析】由题意可得 $B=\{x|1<x<5\}$. 因为 $A\cap B=\{x|a-1<x<5\}$,所以$\begin{cases}a-1\geqslant 1,\\a-1<5,\\a+2\geqslant 5,\end{cases}$解得 $3\leqslant a<6$. 故选 C.

2. D 【解析】因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,所以 $\cos\theta\tan\theta+\frac{4}{5}=0$,得 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$,所以 $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\left(-\frac{4}{5}\right)^2=-\frac{7}{25}$. 故选 D.

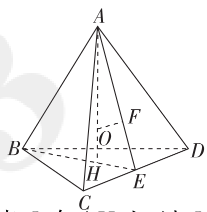
3. A 【解析】设 $S_4=x(x\neq 0)$,则 $S_8=4x$,因为$\{a_n\}$为等比数列,所以 $S_4,S_8-S_4,S_{12}-S_8,S_{16}-S_{12}$ 成等比数列. 易知 $\frac{S_8-S_4}{S_4}=\frac{4x-x}{x}=3$,所以$\begin{cases}S_{12}-S_8=3(S_8-S_4)=9x,\\S_{16}-S_{12}=3(S_{12}-S_8)=27x,\end{cases}$可得$\begin{cases}S_{12}=13x,\\S_{16}=40x,\end{cases}$故$\frac{S_{16}}{S_4+S_8}=\frac{40x}{x+4x}=8$. 故选 A.

4. C 【解析】对于 A,由题意知 $P(G_2)=\frac{C_3^1C_6^1}{A_7^2}=\frac{3}{7}$,故 A 错误. 对于 B,因为 $R=R_1\cap R_2$,R_1,R_2 不相互独立,所以 $P(R)\neq P(R_1)P(R_2)$,故 B 错误. 对于 C,因为 $P(R_2)=\frac{C_4^1C_6^1}{A_7^2}=\frac{4}{7}$,所以 $P(R_2)+P(G_2)=1$,故 C 正确. 对于 D,$P(G_2|R_1)=\frac{P(R_1G_2)}{P(R_1)}=\frac{\frac{C_4^1C_3^1}{A_7^2}}{\frac{4}{7}}=\frac{1}{2}$,$P(R_2|G_1)=\frac{P(G_1R_2)}{P(G_1)}=\frac{\frac{C_3^1C_4^1}{A_7^2}}{\frac{3}{7}}=\frac{2}{3}$,所以 $P(G_2|R_1)+P(R_2|G_1)\neq 1$,故 D 错误. 故选 C.

5. D 【解析】由已知可得,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=3\boldsymbol{e}_1+(\lambda+2)\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{e}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{e}_2$. 因为 A,C,D 三点共线,所以 $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CD}$ 共线,则存在 $\mu\in\mathbf{R}$,使得 $\overrightarrow{AC}=\mu\overrightarrow{CD}$,即 $3\boldsymbol{e}_1+(\lambda+2)\boldsymbol{e}_2=\mu\boldsymbol{e}_1+\mu(1-\lambda)\boldsymbol{e}_2$,整理可得 $(3-\mu)\boldsymbol{e}_1+(\lambda+2-\mu+\mu\lambda)\boldsymbol{e}_2=\mathbf{0}$. 因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线,所以$\begin{cases}3-\mu=0,\\\lambda+2-\mu+\mu\lambda=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=\frac{1}{4},\\\mu=3,\end{cases}$故选 D.

6. D 【解析】由 $f(x)=(x-3)^3+x-1$,得 $f(x)-2=(x-3)^3+x-3$,令 $g(x)=f(x)-2$,所以函数 $g(x)$ 的图象关于点$(3,0)$对称且 $g(x)$ 单调递增. 因为 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_7)=14$,所以 $f(a_1)-2+f(a_2)-2+\cdots+f(a_7)-2=14-14=0$,即 $g(a_1)+g(a_2)+\cdots+g(a_7)=0$. 因为$\{a_n\}$是公差不为 0 的等差数列,所以 $a_1+a_7=a_2+a_6=a_3+a_5=2a_4$,所以 $g(a_4)=0$,所以 $a_4=3$,所以 $a_1+a_2+\cdots+a_7=7a_4=21$. 故选 D.

7. C 【解析】设正四面体 $ABCD$ 的内切球的半径为 R,由内切球的表面积 $S_{表}=4\pi R^2=36\pi$,得 $R=3$,如图,过点 A 作 $AH\perp$平面 BCD,垂足为 H,则点 H 为等边三角形 BCD 的中心,连接 BH 并延长,交 CD 于点 E,则点 E 为 CD 的中点,连接 AE,记内切球的球心为 O,易知点 O 在 AH 上,过 O 作 $OF\perp AE$,垂足为 F. 设正四面体的棱长为 a,则 $BE=AE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,$HE=\frac{1}{3}BE=\frac{\sqrt{3}}{6}a$,$AH=\frac{\sqrt{6}}{3}a$,又因为 $OH=OF=3$,所以 $AO=\frac{\sqrt{6}}{3}a-3$,由△AOF∽△AEH,得$\frac{AO}{AE}=\frac{OF}{HE}$,即$\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a-3}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{6}a}$,解得 $a=6\sqrt{6}$. 由图可知,△ABE 即为所求截面图形,其面积 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot AH=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{4}a^2=54\sqrt{2}$. 故选 C.

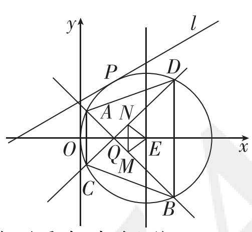


8. C 【解析】由 $f(x)=e^{x-1}-e^{1-x}+x^3-3x^2+3x=e^{x-1}-e^{1-x}+1+(x-1)^3$,记 $g(x)=e^{x-1}-e^{1-x}$,$h(x)=(x-1)^3$,则 $g(x)+g(2-x)=e^{x-1}-e^{1-x}+e^{1-x}-e^{x-1}=0$,$h(x)+h(2-x)=(x-1)^3+(1-x)^3=0$,所以 $g(x)$ 与 $h(x)$ 都为 $\mathbf{R}$ 上的增函数且其图象均关于点$(1,0)$对称,所以 $f(x)+f(2-x)=g(x)+h(x)+1+g(2-x)+h(2-x)+1=2$,故 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数且其图象关于点$(1,1)$对称. 由 $f(x^2)+f(2y^2-1)=2$,得 $x^2+2y^2-1=2$,可得 $x^2+2y^2=3$. 记 $A=x\sqrt{1+y^2}$,则 $A^2=x^2(1+y^2)=\frac{1}{2}x^2(2+2y^2)\leqslant\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2+2+2y^2}{2}\right)^2=\frac{25}{8}$,当且仅当$\begin{cases}x^2=2+2y^2,\\x^2+2y^2=3,\end{cases}$即$\begin{cases}x=\pm\frac{\sqrt{10}}{2},\\y=\pm\frac{1}{2}\end{cases}$时取等号,可得 $-\frac{5\sqrt{2}}{4}\leqslant A\leqslant\frac{5\sqrt{2}}{4}$,故 $x\sqrt{1+y^2}$ 的最大值为$\frac{5\sqrt{2}}{4}$. 故选 C.

9. AC 【解析】由 $f(3-x)=f(-1+x)$,得 $f(2-x)=f(x)$,即 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,又因为 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(x)=-f(-x)$,所以 $f(2-x)=-f(-x)$,可得 $f(4-x)=-f(2-x)=f(-x)$,故 $f(4+x)=f(x)$,所以 $f(x)$ 的一个周期为 4,故选项 A 正确;当 $x\in[1,2]$ 时,$2-x\in[0,1]$,所以 $f(x)=f(2-x)=(2-x)^3-2(2-x)$,故选项 B 错误;当 $x\in[0,1]$ 时,$f(x)=x^3-2x$,则 $f'(x)=3x^2-2$,令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$,当 $x\in\left[0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in\left(\frac{\sqrt{6}}{3},1\right]$ 时,$f'(x)>0$,所以函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$内有

最小值 $f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$,又因为 $f(x)$ 为奇函数,所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 内有最大值 $f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=-f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{6}}{9}$,故选项C正确;因为奇函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,所以 $f(0)=f(2)=f(-2)=0$,当 $x\in[0,4)$ 时,$f(x)$ 有2个零点,而 $2023=505\times4+3$,易知当 $x\in[2020,2023]$ 时,$f(x)$ 有2个零点,故 $f(x)$ 在区间 $[0,2023]$ 内有1012个零点,故选项D错误. 故选 AC.

10. AD 【解析】设圆心为 $E(2,b)$,则其半径 $r=\sqrt{(2-1)^2+(b-\sqrt{3})^2}$,依题意得 $\frac{|2-\sqrt{3}b+2|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=\sqrt{(2-1)^2+(b-\sqrt{3})^2}$,解得 $b=0$,则 $r=2$,因此圆 E 的方程为 $(x-2)^2+y^2=4$,故A正确. 对于 $(x-2)^2+y^2=4$,令 $x=1$,得 $y=\pm\sqrt{3}$. 当弦 AB 或 CD 与 x 轴垂直时,四边形 $ACBD$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$. 当弦 AB,CD 与 x 轴均不垂直时,如图,连接 EM,EN,则 $EM\perp AB,EN\perp CD$,又 $AB\perp CD$,所以四边形 $ENQM$ 为矩形,设 $|EM|=d$,则 $|NQ|=d$,$|NE|=\sqrt{|QE|^2-|NQ|^2}=\sqrt{1-d^2}$,故 $|AB|=2\sqrt{4-d^2}$,$|CD|=2\sqrt{4-|NE|^2}=2\sqrt{4-1+d^2}=2\sqrt{3+d^2}$,所以 $S_{四边形ACBD}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|CD|=2\sqrt{(4-d^2)(3+d^2)}=2\sqrt{-(d^2)^2+d^2+12}$,当 $d^2=\frac{1}{2}$ 时,四边形 $ACBD$ 的面积取到最大值,为 $2\sqrt{-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+12}=7$. 综上可知,四边形 $ACBD$ 面积的最大值为7,故B错误. 当 AB 过圆心时,弦 AB 最长,$|AB|_{\max}=4$;当 $AB\perp QE$ 时,弦 AB 最短,$|AB|_{\min}=2\sqrt{3}$.

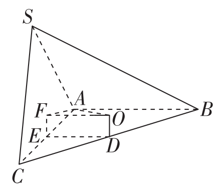


所以弦 AB 长度的取值范围为 $[2\sqrt{3},4]$,故C错误. 当弦 AB 或 CD 与 x 轴垂直时,易知直线 MN 与 x 轴重合. 当弦 AB,CD 与 x 轴均不垂直时,矩形 $ENQM$ 的对角线 MN,QE 互相平分,而 $Q(1,0),E(2,0)$,则 MN 过 QE 的中点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$. 综上可知,直线 MN 恒过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$,故D正确. 故选 AD.

11. ABD 【解析】设 $h(x)=e^x-x-1$,则 $h'(x)=e^x-1$,所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,所以 $h(x)\geqslant h(0)=0$,当且仅当 $x=0$ 时,$e^x-x-1=0$. 假设 $a_{n+1}=0$,则由 $a_n\cdot e^{a_{n+1}}=e^{a_n}-1$,得 $a_n=e^{a_n}-1$,$a_n=0$,则 $a_{n+1}=a_n=\cdots=a_1=0$,与 $a_1=1$ 矛盾,所以 $a_n\neq0$,所以 $e^{a_{n+1}}=\frac{e^{a_n}-1}{a_n}$. 对于A,设 $g(x)=e^x-1-xe^x$,可得 $g'(x)=e^x-e^x-xe^x=-xe^x$,当 $x>0$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减,当 $x<0$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增,所以当 $x\neq0$ 时,$g(x)<g(0)=0$,所以 $xe^x>e^x-1$,所以 $a_ne^{a_n}>e^{a_n}-1$,由 $h(x)=e^x-x-1\geqslant0$,得当 $x>0$ 时,$\frac{e^x-1}{x}>1$,因为 $a_1=1$,所以 $e^{a_2}=\frac{e^{a_1}-1}{a_1}=\frac{e-1}{1}>1$,则 $a_2>0$,同理得 $a_3>0,\cdots,a_n>0$,当 $a_n>0$ 时,$e^{a_n}>\frac{e^{a_n}-1}{a_n}=e^{a_{n+1}}$,所以 $a_n>a_{n+1}$,故数列 $\{a_n\}$ 为递减数列,选项A正确;对于B,假设 $a_{n+1}>\frac{1}{2}a_n$ 成立,则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\ln\frac{e^{a_n}-1}{a_n}}{a_n}>\frac{1}{2}\Rightarrow\ln\frac{e^{a_n}-1}{a_n}>\frac{1}{2}a_n\Rightarrow\frac{e^{a_n}-1}{a_n}>e^{\frac{1}{2}a_n}$,易知 $0<a_n\leqslant1$,令 $b=e^{a_n}$,$1<b\leqslant e$,则不等式等价于 $\frac{b-1}{\ln b}>b^{\frac{1}{2}}\Rightarrow b^{\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}-\ln b>0$,令 $m(b)=b^{\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}-\ln b$,$b\in(1,e]$,则 $m'(b)=\frac{1}{2b}\left(\sqrt{b}+\frac{1}{\sqrt{b}}-2\right)>0$,所以 $m(b)>m(1)=0$ 成立,所以 $a_{n+1}>\frac{1}{2}a_n$,选项B正确;对于C,$a_{n+1}-a_n=\ln(e^{a_n}-1)-\ln a_n-a_n$,设 $f(x)=\ln(e^x-1)-\ln x-x$,$x\in(0,1]$,则 $f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}-1=\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}<0$,所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减,所以随着 n 的增大,a_n 减小,$a_{n+1}-a_n$ 增大,所以 $a_{2n+1}-a_{2n}>a_{2n}-a_{2n-1}$,选项C错误;对于D,当 $n>1$ 时,根据选项B可知,$a_{n+1}>\frac{1}{2}a_n$,可得 $a_n>\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,当 $n=1$ 时,$a_1=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}=1$,所以 $a_n\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$,选项D正确. 故选 ABD.

12. 30 【解析】$a_1=C_m^1+C_n^1=m+n=12$,$a_2=C_m^2+C_n^2=\frac{m(m-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{m^2+n^2-(m+n)}{2}=\frac{m^2+n^2-12}{2}=\frac{m^2+n^2}{2}-6=\frac{(m+n)^2-2mn}{2}-6=\frac{12^2-2mn}{2}-6=66-mn$,因为 $m\in\mathbf{N}^*$,$n\in\mathbf{N}^*$,$m+n=12\geqslant2\sqrt{mn}$,所以 $mn\leqslant36$,当且仅当 $m=n=6$ 时等号成立,所以 $a_2=66-mn\geqslant30$,故 a_2 的最小值为30.

13. $\frac{125\pi}{6}$ 【解析】依题意,$AB\perp SA$,$AB\perp AC$,$SA\cap AC=A$,$SA,AC\subset$ 平面 SAC,所以 $AB\perp$ 平面 SAC,因为 $AB\subset$ 平面 ABC,所以平面 $ABC\perp$ 平面 SAC. 设 D,E 分别是 BC,AC 的中点,如图,连接 DE,则 $DE/\!/AB$,所以 $DE\perp$ 平面 SAC. 设 F 是 $\triangle SAC$ 的外心,连接 FA,在 $\triangle SAB$ 中,$SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=\sqrt{13-9}=2$,在 $\triangle SAC$ 中,由正弦定理得 $FA=\frac{1}{2}\cdot\frac{SA}{\sin\angle SCA}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sin30^\circ}=2$. 连接 FE,则 $FE\perp AC$,过 F 作平面 SAC 的垂线,过 D 作平面 ABC 的垂线,易知两垂线相交,记交点为 O,因为 $EF\subset$ 平面 SAC,所以 $DE\perp EF$,所以四边形 $ODEF$ 是矩形,易得 O 是三棱锥 S-ABC 外接球的球心. 因为 $AF\subset$ 平面 SAC,所以 $OF\perp AF$,连接 AO,在 $\mathrm{Rt}\triangle AFO$ 中,$AF=2$,$OF=DE=\frac{3}{2}$,所以 $OA=\sqrt{AF^2+OF^2}=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\frac{5}{2}$,即三棱锥 S-ABC 外接球的半径为 $\frac{5}{2}$,所以外接球的体积为 $\frac{4\pi}{3}\times\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125\pi}{6}$.

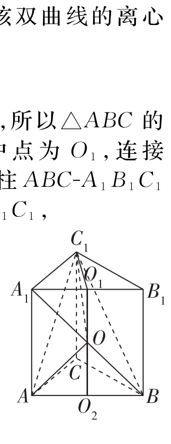


14. $\frac{\pi}{3}$ 【解析】连接 PF_2,由题设知 $\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2a_1,\\|PF_1|-|PF_2|=2a_2,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}|PF_1|=a_1+a_2,\\|PF_2|=a_1-a_2,\end{cases}$ 又 $\begin{cases}\frac{c}{a_1}=e_1,\\\frac{c}{a_2}=e_2,\\e_1e_2=1,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a_1=\frac{c}{e_1},\\a_2=e_1c.\end{cases}$ 直线 PF_1 与 y 轴的交点的坐标为 $\left(0,\frac{3a_2}{2}\right)$,则 $\cos\angle PF_1F_2=\frac{c}{\sqrt{c^2+\frac{9}{4}a_2^2}}=\frac{2}{\sqrt{4+9e_1^2}}$,又在 $\triangle PF_1F_2$ 中,$\cos\angle PF_1F_2=\frac{|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-|PF_2|^2}{2|PF_1||F_1F_2|}=\frac{(a_1+a_2)^2+(2c)^2-(a_1-a_2)^2}{2(a_1+a_2)\cdot2c}=\frac{a_1a_2+c^2}{(a_1+a_2)c}=\frac{2}{e_1+\frac{1}{e_1}}$,所以 $\frac{2}{\sqrt{4+9e_1^2}}=\frac{2}{e_1+\frac{1}{e_1}}$,整理得 $8e_1^4+$

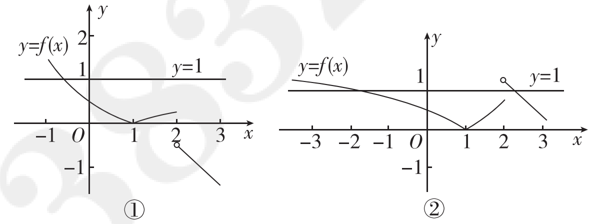
$2e_1^2-1=0$,可得 $e_1^2=\frac{1}{4}$ 或 $e_1^2=-\frac{1}{2}$(舍去),由 $0<e_1<1$,得 $e_1=\frac{1}{2}$.由椭圆的性质知,当 Q 为椭圆 C_1 的短轴顶点时,$\angle F_1QF_2$ 最大,此时 $\sin\frac{\angle F_1QF_2}{2}=\frac{c}{a_1}=e_1=\frac{1}{2}$,由 $\angle F_1QF_2\in(0,\pi)$,得 $\frac{\angle F_1QF_2}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,即 $\frac{\angle F_1QF_2}{2}=\frac{\pi}{6}$,故 $\angle F_1QF_2$ 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$.

训练 42　8 单选+3 多选+3 填空

1. C 【解析】因为 $2z=1+\mathrm{i}z$,所以 $z=\frac{1}{2-\mathrm{i}}=\frac{2+\mathrm{i}}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}$,所以$(5-5\mathrm{i})z=(5-5\mathrm{i})\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}\right)=3-\mathrm{i}$,所以$|(5-5\mathrm{i})z|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$.故选 C.
2. B 【解析】由题意,根据正态分布的对称性,得$\frac{3a-3-a+1}{2}=6$,解得 $a=7$,故选 B.
3. C 【解析】当 $k=0$ 时,$-\frac{3}{8}\leqslant 0$ 恒成立;当 $k\neq 0$ 时,$\begin{cases}k<0,\\ \Delta=k^2-4\times 2k\times\left(-\frac{3}{8}\right)\leqslant 0,\end{cases}$解得$-3\leqslant k<0$.综上,$-3\leqslant k\leqslant 0$,故选 C.
4. D 【解析】由函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的图象的相邻两条对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{6}$,得$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{3}$,所以 $\omega=6$,所以 $f(x)=2\sin(6x+\varphi)$,又 $f(x)$的图象关于点$\left(\frac{5\pi}{18},0\right)$对称,所以 $f\left(\frac{5\pi}{18}\right)=2\sin\left(6\times\frac{5\pi}{18}+\varphi\right)=0$,即 $\sin\left(\frac{5\pi}{3}+\varphi\right)=0$,则$\frac{5\pi}{3}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $\varphi=-\frac{5\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,又$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.故选 D.
5. D 【解析】将 4 个空车位视为一个元素,与 8 辆车共 9 个元素进行全排列,共有 $A_9^9=9A_8^8$ 种停车方法.故选 D.
6. D 【解析】由题知 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,因为直线 PF_2 与直线 $y=\frac{b}{a}x$ 垂直,所以直线 PF_2 的方程为 $y=-\frac{a}{b}(x-c)$,由$\begin{cases}y=\frac{b}{a}x,\\ y=-\frac{a}{b}(x-c),\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{a^2}{c},\\ y=\frac{ab}{c},\end{cases}$即 $P\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$,所以 $\overrightarrow{PF_1}=\left(-c-\frac{a^2}{c},-\frac{ab}{c}\right)=\left(-\frac{a^2+c^2}{c},-\frac{ab}{c}\right)$,因为 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PF_1}$,所以 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PF_1}=\left(\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PF_1}\right)\cdot\overrightarrow{PF_1}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PF_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PF_1}^2=\frac{(a^2+c^2)^2+a^2b^2}{3c^2}-\frac{a^2b^2+a^2(a^2+c^2)}{c^2}=0$,整理可得 $c=\sqrt{3}a$,故该双曲线的离心率为$\frac{c}{a}=\sqrt{3}$.故选 D.
7. C 【解析】因为$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,所以$\triangle ABC$ 的外心是 AB 的中点,设为 O_2,设 A_1B_1 的中点为 O_1,连接 O_1O_2,设 O_1O_2 的中点为 O,则 O 是直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的外接球的球心,连接 OC_1,OA,OB,OA_1,O_1C_1,设外接球的半径为 R,则 $R=OA_1=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.因为 $C_1A_1=C_1B_1$,所以 $C_1O_1\perp A_1B_1$,根据直棱柱的性质可知 $C_1O_1\perp AA_1$,因为 $AA_1\cap A_1B_1=A_1$,AA_1,$A_1B_1\subset$平面 ABB_1A_1,所以 $C_1O_1\perp$平面 ABB_1A_1,$C_1O_1=\frac{1}{2}A_1B_1=2$,所以$V_{C_1\text{-}ABO}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 4\times 2\right)\times 2=\frac{8}{3}$.因为 $AC=BC=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$,所以 $AC_1=BC_1=\sqrt{4^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$,所以 $S_{\triangle ABC_1}=\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{(2\sqrt{6})^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2}=4\sqrt{5}$.设点 O 到平面 ABC_1 的距离为 h,则$\frac{1}{3}\times 4\sqrt{5}\times h=\frac{8}{3}$,解得 $h=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以平面 ABC_1 截三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的外接球所得截面的半径为 $\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$,所以所求截面面积为 $\pi\times\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{36}{5}\pi$.故选 C.



8. B 【解析】当 $0<a<1$ 时,若 $1<x\leqslant 2$,则 $a^x<a$,则 $f(x)=|a^x-a|=a-a^x$,则 $f(2)-1=a-a^2-1=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0$,即$f(2)<1$,又 $3a-2<1$,所以 $f(x)$的大致图象如图①所示,此时 $f(x)$的图象与直线 $y=1$ 仅有一个交点,故关于 x 的方程 $f(x)=1$ 仅有一个实数根,不满足题意.



当 $a>1$ 时,若 $1<x\leqslant 2$,则 $a^x>a$,则$f(x)=|a^x-a|=a^x-a$,又 $3a-2>1$,所以 $f(x)$的大致图象如图②所示,因为关于 x 的方程 $f(x)=1$ 有两个不相等的实数根,所以 $f(x)$的图象与直线 $y=1$ 有两个交点,结合图象可知 $f(2)=a^2-a<1$,可得 $1<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.故选 B.

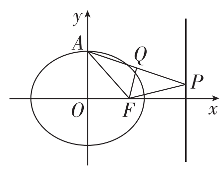
9. ABD 【解析】对于 A,若 $\overrightarrow{OZ_1}/\!/\overrightarrow{OZ_2}$,则$\frac{1}{x}=\frac{-1}{y}$,即 $y=-x$,即 $x+y=0$,故 A 正确;对于 B,若 $\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$,则 $\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}=(1,-1)\cdot(x,y)=x-y=0$,即 $x=y$,则$|z_1+z_2|=\sqrt{(1+x)^2+(x-1)^2}$,$|z_1-z_2|=\sqrt{(x-1)^2+(1+x)^2}$,故 B 正确;对于 C,若 $\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$,则 $x=y$,则 $z_1z_2=(1-\mathrm{i})(x+x\mathrm{i})=2x$,当 $x\neq 0$ 时,$z_1z_2\neq 0$,故 C 错误;对于 D,若 $z_1^2+z_2^2=-2\mathrm{i}+x^2-y^2+2xy\mathrm{i}=0$,则$\begin{cases}x^2-y^2=0,\\ xy=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\ y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1,\\ y=-1,\end{cases}$所以 $\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}=x-y=0$,故 $\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$,故 D 正确.故选 ABD.
10. ABC 【解析】对于 A,因为 $\chi^2\geqslant 6.635=x_{0.01}$,所以根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,认为两个分类变量有关联,故 A 正确;对于 B,χ^2 越大,X 与 Y 有关联的可信程度越大,相关性就越大,故 B 正确;对于 C,在回归分析中,决定系数 R^2 越大,说明残差平方和越小,拟合效果越好,故 C 正确;对于 D,若 x 与 y 的经验回归方程为 $\hat{y}=0.5x-85$,则当 $x=200$ 时,y 的估计值是 15,不能说一定是 15,故 D 错误.故选 ABC.
11. ABD 【解析】$\because l_1\perp l_2$,$\therefore 1\times b+(a-2)\times 1=0$,即 $a+b=2$,$\therefore 0<ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=1$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立,故 A 正确;$\because(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}\leqslant 2(a+b)=4$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立,$\therefore\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 2$,故 B 正确;$a^2+b^2=a^2+(2-a)^2=2a^2-4a+4=2(a-1)^2+2\geqslant 2$,故 C 错误;$\frac{b}{a}+\frac{2}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a+b}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+1\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+1=3$,当且

仅当$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$,即$a=b=1$时等号成立,故D正确.故选ABD.

12. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ **[解析]** 因为集合$A=\left[0,\frac{1}{2}\right)$,$B=\left[\frac{1}{2},1\right)$,函数$f(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{2},x\in A,\\2(1-x),x\in B,\end{cases}$所以当$x_0\in A$时,$f(x_0)=x_0+\frac{1}{2}\in\left[\frac{1}{2},1\right)=B$,所以$f[f(x_0)]=2\left[1-\left(x_0+\frac{1}{2}\right)\right]=1-2x_0$.因为$f[f(x_0)]\in A$,所以$1-2x_0\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$,解得$x_0\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$,又$x_0\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$,所以$x_0\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$,故$x_0$的取值范围为$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

13. 是 2 **[解析]** 由题意,可得$P(A)=\frac{1}{2}$,$P(B)=\frac{1}{2}$,$P(C)=\frac{1}{2}$,且$P(AB)=\frac{1}{4}$,$P(AC)=\frac{1}{4}$,$P(BC)=\frac{1}{4}$,$P(ABC)=\frac{1}{4}$,所以$P(AB)=P(A)P(B)$,$P(AC)=P(A)P(C)$,$P(BC)=P(B)P(C)$,所以事件A,B,C是两两独立的,且$\frac{P(ABC)}{P(A)P(B)P(C)}=2$.

14. $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$ **[解析]** 如图,取AP的中点Q,连接FQ,则$\overrightarrow{FQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA})$,所以$(\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA})\cdot\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{FQ}\cdot\overrightarrow{AP}=0$,所以$FQ\perp AP$,所以$\triangle AFP$为等腰三角形,即$|FA|=|FP|$,因为$|FA|=\sqrt{b^2+c^2}=a$,所以$|FP|=a$,又因为点$P$在直线$x=\frac{a^2}{c}$上,所以$|FP|\geqslant\frac{a^2}{c}-c$,即$a\geqslant\frac{a^2}{c}-c$,所以$\frac{a}{c}\geqslant\frac{a^2}{c^2}-1$,即$e^2+e-1\geqslant0$,解得$e\geqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$或$e\leqslant\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$,又$0<e<1$,所以$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant e<1$,故$e$的取值范围为$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$.



训练 43 8单选+3多选+3填空

1. B **[解析]** 因为全集$U=\{1,2,3,4,5\}$,集合$A=\{1,2,4\}$,$B=\{2,3\}$,所以$\complement_UA=\{3,5\}$,$\complement_UB=\{1,4,5\}$,所以$(\complement_UA)\cap(\complement_UB)=\{5\}$.故选B.

2. A **[解析]** 由$f(-x)=-x+\frac{\cos(-x)}{(-x)^2}=-x+\frac{\cos x}{x^2}\neq\pm f(x)$,可知函数$f(x)$为非奇非偶函数,排除B,C;由$f(-\pi)=-\pi+\frac{\cos(-\pi)}{(-\pi)^2}=-\pi+\frac{\cos\pi}{\pi^2}=-\pi-\frac{1}{\pi^2}$,$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}+\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}=-\frac{\pi}{2}$,可知$f(-\pi)<f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$,排除D.故选A.

3. B **[解析]** 依题意可得$f(x)$在区间$[2,4]$上单调递减,则$f'(x)\leqslant0$在区间$[2,4]$上恒成立.因为$f'(x)=\frac{1}{x}-2k$,所以$2k\geqslant\frac{1}{x}$对任意$x\in[2,4]$恒成立,又函数$y=\frac{1}{x}$在区间$[2,4]$上单调递减,所以$2k\geqslant\frac{1}{2}$,解得$k\geqslant\frac{1}{4}$,故实数k的取值范围是$\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.故选B.

4. B **[解析]** 由$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,得$\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$\frac{\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2}{|\boldsymbol{b}|^2}\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}$.故选B.

5. A **[解析]** 分两种情况讨论:①选一名男生排在最后,此时有$C_2^1=2$(种)排法,3名女生全排列有$A_3^3=6$(种)排法,最后将剩余的1名男生插入3名女生形成的4个空中,且不能与男生相邻,共有3种排法,所以共有$2\times6\times3=36$(种)排法;②选一名女生排在最后,因为女生甲不排在最后,所以有$C_2^1=2$(种)排法,将甲与另一名女生全排列,有$A_2^2=2$(种)排法,最后将2名男生插入到甲与另一个女生形成的3个空中,共$A_3^2=6$(种)排法,所以共有$2\times2\times6=24$(种)排法.综上所述,共有$36+24=60$(种)排法,故选A.

6. C **[解析]** 由圆C的方程为$x^2+y^2+2mx-2y+5m-3=0$,得圆C的标准方程为$(x+m)^2+(y-1)^2=m^2-5m+4$,其圆心为$C(-m,1)$,半径$r=\sqrt{m^2-5m+4}$,所以$m^2-5m+4>0$,解得$m<1$或$m>4$.圆心$(-m,1)$到直线$l:x+y-1=0$的距离$d=\frac{|-m+1-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}|m|$,则直线$l$与圆$C$相交所得弦长为$2\sqrt{r^2-d^2}=8$,即$2\sqrt{m^2-5m+4-\frac{m^2}{2}}=8$,整理得$m^2-10m-24=0$,解得$m=-2$或$m=12$.故选C.

7. C **[解析]** 设圆台的上底面圆的半径为r,母线长为l,则下底面圆的半径为$2r$,易知$l=r+2r=3r$,由圆台的侧面积$S=(\pi r+2\pi r)l=9\pi$,可得$r=1$,所以球O的直径为$2\sqrt{2}$,球O的半径为$\sqrt{2}$,所以球O的表面积为8π.故选C.

8. D **[解析]** ∵$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,$f(-x)=\sqrt{|-x+1|}-\sqrt{|-x-1|}=\sqrt{|x-1|}-\sqrt{|x+1|}=-f(x)$,∴$f(x)$为奇函数,∴对任意$x\in\mathbf{R}$,都有$f(x)+f(-x)=0$,故A错误;当$x>0$时,$f(x)=\sqrt{|x+1|}-\sqrt{|x-1|}=\begin{cases}\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x},0<x\leqslant1,\\\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1},x>1,\end{cases}$易知$f(x)$在$(0,1]$上单调递增,∴当$x\in(0,1]$时,$f(x)\in(0,\sqrt{2}]$,当$x>1$时,$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$,∴$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减,∴当$x\in(1,+\infty)$时,$f(x)\in(0,\sqrt{2})$,∴当$x>0$时,$f(x)\in(0,\sqrt{2}]$,∴当$x<0$时,$f(x)\in[-\sqrt{2},0)$,又$f(0)=0$,∴当$m=0$时,方程$f(x)=m$仅有一个根,故B错误;当$x\in(0,1)$时,$2-x\in(1,2)$,则$f(x)-f(2-x)=(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x})-(\sqrt{2-x+1}-\sqrt{2-x-1})=\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}-\sqrt{3-x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}$,设$p(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}$,易知$p(x)$在$(0,1)$上单调递增,∴当$x\in(0,1)$时,$p(x)<p(1)=0$,∴对任意$x\in(0,1)$,$f(x)<f(2-x)$,故C错误;当$a\leqslant0$时,$2-a\geqslant2$,此时$f(a)\leqslant0<f(2-a)$,当$a\in(0,1)$时,$2-a\in(1,2)$,此时$f(a)<f(2-a)$,当$a\geqslant1$时,$2-a\in(0,1]$,此时$f(a)\geqslant f(2-a)$,故D正确.故选D.

9. BD **[解析]** 对于A,当第一次掷出1,第二次掷出5或第一次掷出3,第二次掷出3或第一次掷出5,第二次掷出1时,事件A与事件B同时发生,故事件A与事件B不是互斥事件,故A错误;对于B,因为$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,$P(C)=\frac{6}{6\times6}=\frac{1}{6}$,$P(BC)=\frac{3}{6\times6}=\frac{1}{12}=P(B)\cdot P(C)$,所以$B$与$C$相互独立,故B正确;对于C,$P(A)=\frac{5}{6\times6}=\frac{5}{36}\neq\frac{1}{6}$,故C错误;对于D,点数和为6,且两次掷出的点数相同仅有两次都掷出3点这一种情况,故$P(AC)=\frac{1}{6\times6}=\frac{1}{36}$,故D正确.故选BD.

10. AD **[解析]** 当$a_0=7$时,$a_1=22$,$a_2=11$,$a_3=34$,$a_4=17$,$a_5=52$,$a_6=26$,$a_7=13$,$a_8=40$,$a_9=20$,$a_{10}=10$,$a_{11}=5$,故A正确;当$a_0=16$时,$a_1=8$,$a_2=4$,$a_3=2$,$a_4=1$,$a_5=4$,所以$\{a_n\}$不是递减数列,故B错误;若$a_5=1$,则$a_4=2$,$a_3=4$,当$a_2=8$时,$a_1=16$,$a_0=5$或32,当$a_2=1$时,不满足题意,

舍去,故 C 错误;当 $a_0=10$ 时,$a_1=5,a_2=16,a_3=8,a_4=4,a_5=2,a_6=1$,所以从 $a_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 中任取两个数至少有一个为奇数的概率为 $1-\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{3}{5}$,故 D 正确. 故选 AD.

11. ABC 【解析】由题知 $F(1,0)$,因为 P,Q 与坐标原点 O 不重合,所以切线 MP,MQ 的斜率都存在. 设直线 MP 的方程为 $y=kx+m$,由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $k^2x^2+(2km-4)x+m^2=0$,因为直线 MP 与抛物线相切,所以 $\Delta=(2km-4)^2-4k^2m^2=0$,可得 $km=1$,即 $k=\frac{1}{m}$,则 $x_P=m^2$,所以 $P(m^2,2m)$. 设 $Q(x_0,y_0)$,过点 M 向圆 F 作切线,切点为 O,Q,所以 O,Q 两点关于直线 MF 对称,直线 MF 的方程为 $y=-mx+m$,则 $\begin{cases}\frac{y_0}{x_0}\cdot\frac{m-0}{0-1}=-1,\\ \frac{y_0}{2}=-m\cdot\frac{x_0}{2}+m,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=\frac{2m^2}{m^2+1},\\ y_0=\frac{2m}{m^2+1},\end{cases}$ 所以 $Q\left(\frac{2m^2}{m^2+1},\frac{2m}{m^2+1}\right)$. 对于 A,因为 $\overrightarrow{MP}=(m^2,m)$,$\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{2m^2}{m^2+1},\frac{2m}{m^2+1}\right)=\frac{2}{m^2+1}\cdot\overrightarrow{MP}$,所以 $MP\parallel OQ$,故 A 正确;对于 B,因为 $\overrightarrow{MF}=(1,-m)$,$\overrightarrow{MP}=(m^2,m)$,所以 $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{MP}=0$,所以 $MP\perp MF$,故 B 正确;对于 C,因为 $\overrightarrow{FQ}=\left(\frac{m^2-1}{m^2+1},\frac{2m}{m^2+1}\right)$,$\overrightarrow{FP}=(m^2-1,2m)=(m^2+1)\cdot\overrightarrow{FQ}$,所以 P,Q,F 三点共线,故 C 正确;对于 D,由几何性质易知 M,O,F,Q 四点共圆,且圆的直径为 MF,OQ 为该圆的一条弦,OQ 与 MF 的长度不一定相等,故 D 错误. 故选 ABC.

12. 0.1 【解析】由题知 $P(X\leqslant 4)=0.5$,所以 $P(X<2)=P(X\leqslant 4)-P(2\leqslant X\leqslant 4)=0.1$.

13. 8 【解析】由题意知直线 l_1,l_2 平行,因为直线 l_1,l_2 与圆的四个交点能构成矩形,所以圆心到两直线的距离相等. 圆 $x^2+y^2+3x+y+k=0$ 的圆心为 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$,圆心到 l_1: $y=3x+m$ 的距离 $d_1=\frac{\left|3\times\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)+m\right|}{\sqrt{10}}=\frac{|m-4|}{\sqrt{10}}$,圆心到 l_2: $y=3x+n$ 的距离 $d_2=\frac{\left|3\times\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)+n\right|}{\sqrt{10}}=\frac{|n-4|}{\sqrt{10}}$,所以 $\frac{|m-4|}{\sqrt{10}}=\frac{|n-4|}{\sqrt{10}}$,即 $|m-4|=|n-4|$,又 $m\neq n$,所以 $m-4=4-n$,即 $m+n=8$.

14. $\left(-\infty,-\frac{5}{8}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 【解析】由 $a_{n+1}+a_n=2a_{n+2}$,得 $a_n+a_{n-1}=2a_{n+1}(n\geqslant 2)$,等式两边同时减去 $2a_n$,得 $a_n+a_{n-1}-2a_n=2a_{n+1}-2a_n(n\geqslant 2)$,整理得 $a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1})(n\geqslant 2)$,又 $a_2-a_1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$,所以数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 $-\frac{1}{2}$ 为首项,$-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列,所以 $a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$,所以 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right](n\geqslant 2)$,又 $a_1=1$ 也满足上式,所以 $a_n=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$. 显然 $a_n>0$,由 $a_na_{n+3}<(a_{n+3}-a_n)m+m^2$,得 $m^2+(a_{n+3}-a_n)m-a_na_{n+3}>0$,即 $(m-a_n)(m+a_{n+3})>0$,解得 $m>a_n$ 或 $m<-a_{n+3}$,由题意可知,存在 $n\in\mathbf{N}^*$,使得 $m>(a_n)_{\min}$ 或 $m<(-a_{n+3})_{\max}$. 当 n 为偶数时,$a_n=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]\in\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$,$-a_{n+3}=-\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+3}\right]\in\left[-\frac{11}{16},-\frac{2}{3}\right)$,所以 $m>\frac{1}{2}$ 或 $m<-\frac{2}{3}$;当 n 为奇数时,$a_n=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]\in\left(\frac{2}{3},1\right]$,$-a_{n+3}=-\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+3}\right]\in\left(-\frac{2}{3},-\frac{5}{8}\right]$,所以 $m>\frac{2}{3}$ 或 $m<-\frac{5}{8}$. 综上可知,实数 m 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{5}{8}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

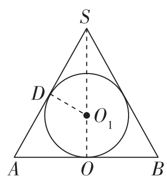
训练 44 8 单选+3 多选+3 填空

1. A 【解析】由题意得 $z=\frac{(m-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{m-1-(m+1)i}{2}=\frac{m-1}{2}-\frac{m+1}{2}i$,因为 $m\in\mathbf{R}$,且 z 是实数,所以 $\frac{m+1}{2}=0$,解得 $m=-1$,所以实数 $m=-1$. 故选 A.

2. B 【解析】由 $(a^2-4)x+y-1=0$,可得直线 l_1 的斜率 $k_1=4-a^2$,若 $l_1\perp l_2$,则当 $4-a^2=0$,即 $a=\pm 2$ 时,需满足 $a-2=0$,即 $a=2$;当 $4-a^2\neq 0$,即 $a\neq\pm 2$ 时,需满足 $a^2-4+a-2=0$,可得 $a=-3$. 故"$l_1\perp l_2$"不是"$a=-3$"的充分条件. 若 $a=-3$,则 $k_1=4-9=-5$,直线 l_2 的斜率 $k_2=-\frac{1}{-3-2}=\frac{1}{5}$,此时 $k_1k_2=-1$,故 $l_1\perp l_2$,故"$l_1\perp l_2$"是"$a=-3$"的必要条件. 综上,"$l_1\perp l_2$"是"$a=-3$"的必要不充分条件. 故选 B.

3. B 【解析】因为 $c=\log_3 2<\log_3 3=1$,$1=\log_4 4<b=\log_4 5<\log_4 6=\frac{\log_2 6}{\log_2 4}=\frac{2\log_2\sqrt{6}}{2}=\log_2\sqrt{6}=a$,所以 $c<b<a$. 故选 B.

4. C 【解析】圆锥与其内切球的轴截面如图所示,圆 O_1 与 $\triangle SAB$ 的边 AB,AS 分别相切于点 O,D,连接 SO,O_1D. 由已知得 O_1 在 SO 上,$O_1D=1$,$SO_1=2$,可知 $\angle O_1SD=30°$,因为 $SO=3$,所以圆锥底面圆的半径 $AO=SO\cdot\tan 30°=\sqrt{3}$,母线长 $SA=\frac{AO}{\sin 30°}=2\sqrt{3}$,则圆锥的表面积为 $\pi\times(\sqrt{3})^2+\pi\times\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}=9\pi$. 故选 C.



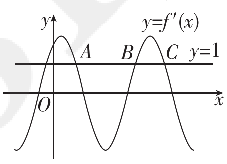
5. A 【解析】函数 $f(x)=\ln x+x^2-bx$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,等价于 $f'(x)=\frac{1}{x}+2x-b\geqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立,即 $b\leqslant\frac{1}{x}+2x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立. 令 $g(x)=\frac{1}{x}+2x,x\geqslant 1$,则 $g'(x)=2-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^2-1}{x^2}>0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立,故 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,则 $g(x)\geqslant g(1)=3$,故 $b\leqslant 3$,则 b 的最大值是 3. 故选 A.

6. D 【解析】因为 $AC=CB=2$,$\angle CAB=30°$,所以 $\triangle ABC$ 的外接圆直径为 $2R=\frac{BC}{\sin\angle CAB}=4$. 因为 $\angle APC=\angle ABC=\angle BPC=\angle BAC=30°$,所以 $\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}+\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}=\frac{\sqrt{3}\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}$,所以 $\left[\overrightarrow{PO}-2\left(\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}+\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}\right)\right]\cdot\overrightarrow{PC}=\left(\overrightarrow{PO}-\frac{2\sqrt{3}\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}\right)\cdot\overrightarrow{PC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PC}|^2-2\sqrt{3}|\overrightarrow{PC}|=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{PC}|-2\sqrt{3})^2-6$. 因为 $|\overrightarrow{AC}|<|\overrightarrow{PC}|\leqslant 2R$,即 $2<|\overrightarrow{PC}|\leqslant 4$,所以当 $|\overrightarrow{PC}|=2\sqrt{3}$ 时,$\left[\overrightarrow{PO}-2\left(\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}+\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}\right)\right]\cdot\overrightarrow{PC}$ 取到最小值 -6. 故选 D.

7. B 【解析】不妨设 $M(x_0,y_0)$，$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，则 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，$P(x_0,0)$，则 $|A_1P|=|x_0+a|$，$|A_2P|=|x_0-a|$，$|MP|=|y_0|$，所以 $\frac{|MP|^2}{|A_1P|\cdot|A_2P|}=\frac{y_0^2}{|x_0+a|\cdot|x_0-a|}=\frac{y_0^2}{|x_0^2-a^2|}=\frac{1}{3}$，又 $x_0^2<a^2$，所以 $\frac{y_0^2}{a^2-x_0^2}=\frac{1}{3}$，即 $a^2-x_0^2=3y_0^2$，则 $x_0^2=a^2-3y_0^2$，将上式代入 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，可得 $\frac{a^2-3y_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，化简可得 $a^2=3b^2$，则离心率 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 故选 B.

8. D 【解析】因为 $S_n+a_n=1$，所以 $S_{n+1}+a_{n+1}=1$，两式相减，得 $2a_{n+1}-a_n=0$，即 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$，又当 $n=1$ 时，$S_1+a_1=2a_1=1$，所以 $a_1=\frac{1}{2}$，故 $a_n\neq0$，所以 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项，以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，则 $a_n=\frac{1}{2^n}$，显然 $\{a_n\}$ 是递减数列，要使 a_n 最小，即使 n 最大. 令 $\frac{1}{2^n}\geqslant\frac{1}{2m+1}$，得 $2^n\leqslant2m+1$. 若 $m=1$，则 $n\leqslant1$，此时 $b_1=a_1=\frac{1}{2}$；若 $2\leqslant m\leqslant3$，则 $n\leqslant2$，此时 $b_m=a_2=\frac{1}{4}$；若 $4\leqslant m\leqslant7$，则 $n\leqslant3$，此时 $b_m=a_3=\frac{1}{8}$；若 $8\leqslant m\leqslant15$，则 $n\leqslant4$，此时 $b_m=a_4=\frac{1}{16}$；…；若 $1024\leqslant m\leqslant2047$，则 $n\leqslant11$，此时 $b_m=a_{11}=\frac{1}{2^{11}}$；…. 记数列 $\{b_m\}$ 的前 m 项和为 T_m，则 $T_1=b_1=\frac{1}{2}$，$T_3=b_1+(b_2+b_3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，$T_7=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5+b_6+b_7)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，…，所以 $T_{2047}=11\times\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$，则 $T_{2023}=\frac{11}{2}-\frac{24}{2^{11}}=\frac{11}{2}-\frac{3}{2^8}$，故选 D.

9. AD 【解析】由 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，得 $f'(x)=\omega\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$，令 $\omega x-\frac{\pi}{6}=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $f'(x)$ 取得最大值时，$x=\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$. ∵ $f'(x)$ 的图象与直线 $y=1$ 相交，其中三个相邻的交点 A,B,C（B 在 A,C 之间）满足 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$，∴结合 $f'(x)$ 的图象（如图）可以得到 $|\overrightarrow{AC}|=T=\frac{2\pi}{\omega}$（$T$ 为 $f'(x)$ 的最小正周期），则 $\frac{|\overrightarrow{BC}|}{2}=\frac{T}{6}=\frac{\pi}{3\omega}$，∴ $x_C=\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{3\omega}=\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$，∴ $f'(x_C)=\omega\cos\left(\omega\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{\omega}-\frac{\pi}{6}\right)=\omega\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)=\frac{\omega}{2}=1$，$k\in\mathbf{Z}$，∴ $\omega=2$，



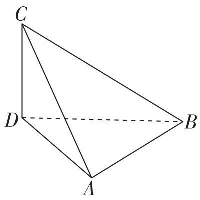
故 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$. 对于选项 A，$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(2\times\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$，又 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\geqslant-1$，∴对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)\geqslant f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$，故 A 正确；对于选项 B，$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$f'(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，将 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象，再将所得图象上各点的纵坐标伸长到原来的 2 倍，横坐标不变，得到 $y=2\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)=-2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，与 $f'(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象不同，故 B 错误；对于选项 C，若 $f(x+\varphi)=\sin\left[2(x+\varphi)-\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x+2\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$ 为偶函数，则 $2\varphi-\frac{\pi}{6}=m\pi+\frac{\pi}{2}$，$m\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$，$m\in\mathbf{Z}$，则正实数 φ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$，故 C 错误；对于选项 D，令 $2n\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant2n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n\in\mathbf{Z}$，解得 $n\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant n\pi+\frac{\pi}{3}$，$n\in\mathbf{Z}$，故 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的单调递增区间为 $\left[n\pi-\frac{\pi}{6},n\pi+\frac{\pi}{3}\right]$，$n\in\mathbf{Z}$，令 $n=-1$，得 $x\in\left[-\frac{7\pi}{6},-\frac{2\pi}{3}\right]$，∵ $\left[-\frac{13\pi}{12},-\frac{3\pi}{4}\right]\subseteq\left[-\frac{7\pi}{6},-\frac{2\pi}{3}\right]$，∴ $f(x)$ 在 $\left[-\frac{13\pi}{12},-\frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调递增，故 D 正确. 故选 AD.

10. CD 【解析】数列 $\{a_n\}$ 的各项乘 10 后再减 4 得到数列 $\{b_n\}$：0,3,6,12,24,48,96,192,…，故该数列从第 2 项起构成公比为 2 的等比数列，所以 $b_n=\begin{cases}0,n=1,\\3\times2^{n-2},n\geqslant2,\end{cases}$ 则 $b_{2023}=3\times2^{2021}$，故 A 错误. $a_n=\frac{b_n+4}{10}=\begin{cases}0.4,n=1,\\0.3\times2^{n-2}+0.4,n\geqslant2,\end{cases}$ 故 B 错误. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=0.4$；当 $n\geqslant2$ 时，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=0.4+0.3(2^0+2^1+\cdots+2^{n-2})+0.4(n-1)=0.4n+0.3\times\frac{1-2^{n-1}}{1-2}=0.4n+0.3\times2^{n-1}-0.3$. 当 $n=1$ 时，$S_1=0.4$ 也符合上式，所以 $S_n=0.4n+0.3\times2^{n-1}-0.3$，所以 $S_{10}=0.4\times10+0.3\times2^9-0.3=157.3$，故 C 正确. 因为 $nb_n=\begin{cases}0,n=1,\\3n\times2^{n-2},n\geqslant2,\end{cases}$ 所以当 $n=1$ 时，$T_1=b_1=0$；当 $n\geqslant2$ 时，$T_n=b_1+2b_2+3b_3+\cdots+nb_n=0+3(2\times2^0+3\times2^1+4\times2^2+\cdots+n\times2^{n-2})$，$2T_n=3(2\times2^1+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+n\times2^{n-1})$，两式相减得 $-T_n=3(2+2^1+2^2+\cdots+2^{n-2}-n\times2^{n-1})=3\left(2+\frac{2-2^{n-1}}{1-2}-n\times2^{n-1}\right)=3(1-n)\times2^{n-1}$，所以 $T_n=3(n-1)\times2^{n-1}$. 又当 $n=1$ 时，$T_1=0$ 也满足上式，所以 $T_n=3(n-1)\times2^{n-1}$，故 D 正确. 故选 CD.

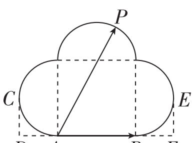
11. ABD 【解析】因为 $f(xy)=yf(x)+xf(y)$，所以令 $x=y=0$，得 $f(0)=0$，故 A 正确；令 $x=y=1$，得 $f(1)=f(1)+f(1)$，所以 $f(1)=0$，令 $x=y=-1$，得 $f(1)=-f(-1)-f(-1)$，所以 $f(-1)=0$，令 $y=-1$，得 $f(-x)=-f(x)+xf(-1)$，又 $f(-1)=0$，所以 $f(-x)=-f(x)$，又因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以函数 $f(x)$ 是奇函数，故 B 正确；令 $x=3$，$y=\frac{1}{3}$，得 $f(1)=\frac{1}{3}f(3)+3f\left(\frac{1}{3}\right)$，又 $f(1)=0$，$f(3)=3$，所以 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$，故 C 错误；当 $x\neq0$ 且 $y\neq0$ 时，由 $f(xy)=yf(x)+xf(y)$，可得 $\frac{f(xy)}{xy}=\frac{f(x)}{x}+\frac{f(y)}{y}$，又 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，所以 $g(xy)=g(x)+g(y)$，任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，不妨设 $x_1<x_2$，则 $g(x_1)-g(x_2)=g(x_1)-g\left(x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\right)=$

$g(x_1)-g(x_1)-g\left(\frac{x_2}{x_1}\right)=-g\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$，因为 $0<x_1<x_2$，所以 $\frac{x_2}{x_1}>1$，所以 $g\left(\frac{x_2}{x_1}\right)=\frac{f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{x_2}{x_1}}<0$，故 $g(x_1)>g(x_2)$，所以 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 D 正确. 故选 ABD.

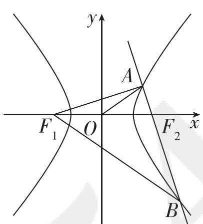
12. 20 【解析】如图，因为 $CD\perp$ 平面 ABD，$AD,BD\subset$ 平面 ABD，所以 $CD\perp AD$，$CD\perp BD$. 设 $CD=x$ 米，因为 $\angle CAD=45°$，$\angle CBD=30°$，所以 $AD=x$ 米，$BD=\sqrt{3}x$ 米. $\angle ADB=30°$，$AB=20$ 米，在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos 30°$，即 $400=x^2+3x^2-2x\cdot\sqrt{3}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得 $x=20$，故甲秀楼的高 CD 为 20 米.



13. $[-8,24]$ 【解析】如图，作 $CD\perp AB$，$EF\perp AB$，垂足分别为 D,F，且 CD 与左半圆相切，切点为 C，EF 与右半圆相切，切点为 E. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}\rangle$，因为 $AB=4$，所以 $AD=BF=2$. 当 P 与 E 重合时，$|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}\rangle$ 最大，最大值为 $4+2=6$，此时 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 取得最大值，最大值为 $4\times6=24$；当 P 与 C 重合时，$|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}\rangle$ 最小，最小值为 -2，此时 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 取得最小值，最小值为 $4\times(-2)=-8$. 故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的取值范围是 $[-8,24]$.



14. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 【解析】如图，不妨设 A 在第一象限内，连接 AF_1，因为 $|OA|=|OF_1|=|OF_2|=c$，所以 $AF_1\perp AF_2$. 因为 $|BF_1|=5a$，所以 $|BF_2|=|BF_1|-2a=3a$. 设 $|AF_2|=m$，则 $|AF_1|=m+2a$，$|AB|=m+3a$. 在 $\text{Rt}\triangle ABF_1$ 中，由勾股定理可得 $|AF_1|^2+|AB|^2=|BF_1|^2$，即 $(m+2a)^2+(m+3a)^2=(5a)^2$，整理可得 $m^2+5am-6a^2=0$，因为 $m>0$，所以 $m=a$，所以 $|AF_2|=a$，$|AF_1|=3a$. 在 $\text{Rt}\triangle AF_1F_2$ 中，由勾股定理可得 $|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2$，即 $9a^2+a^2=(2c)^2$，整理可得 $2c=\sqrt{10}a$，故该双曲线的离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.



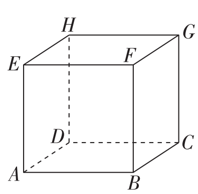
训练 45　8 单选+3 多选+3 填空

1. C 【解析】由题意知 $z=\frac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$，所以 $z+2\overline{z}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}+2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$，所以 $|z+2\overline{z}|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.

2. C 【解析】命题 p：“$\exists x\in\mathbf{R}$，$\mathrm{e}^x-x-1\leqslant0$”的否定是“$\forall x\in\mathbf{R}$，$\mathrm{e}^x-x-1>0$”. 故选 C.

3. D 【解析】因为随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 $P(X<a)+P(X\geqslant a)=1$，又 $P(X<a)=3P(X\geqslant a)$，所以 $4P(X\geqslant a)=1$，解得 $P(X\geqslant a)=0.25$. 故选 D.

4. C 【解析】如图所示，在正方体 $ABCD$-$EFGH$ 中，若 m,n 分别为直线 AB,CD，α 为平面 $ABCD$，显然有 $m/\!/n$，$n\subset\alpha$，但 $m\subset\alpha$，故 A 错误；若 α,β,γ 分别为平面 $ABCD$，平面 $ABFE$，平面 $ADHE$，显然有 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，但 $\alpha\perp\beta$，故 B 错误；若 α，β，γ 分别为平面 $ABCD$，平面 $ABFE$，平面 $ADHE$，则 m,n,l 分别为直线 AB,AE,AD，显然这三条直线两两垂直，故 D 错误；由面面平行的定义可知 C 正确. 故选 C.



5. A 【解析】因为 $\cos A=\frac{1}{3}$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R，因为 $a=8$，所以 $R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{8}{2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}}=3\sqrt{2}$. 故选 A.

6. B 【解析】由 $6\times60\%=3.6$，可知 $n=8$，所以二项式为 $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2x}\right)^8$，其展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_8^r\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{8-r}\cdot\left(\frac{1}{2}x^{-1}\right)^r=\mathrm{C}_8^r\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^r\cdot x^{\frac{8-4r}{3}}$，令 $\frac{8-4r}{3}=0$，得 $r=2$，所以展开式的常数项为 $\mathrm{C}_8^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=7$，故选 B.

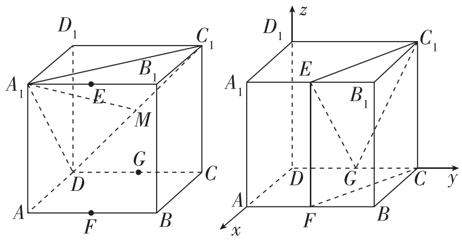
7. B 【解析】由题意得 $F(1,0)$，设直线 l：$x=5+my$，将 $x=5+my$ 与 $y^2=4x$ 联立得 $y^2-4my-20=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，不妨令 $y_1>0$，$y_2<0$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-20$，故 $S_1=\frac{1}{2}|OP|\cdot|y_1-y_2|=\frac{5}{2}(y_1-y_2)$，$S_2=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1|=\frac{1}{2}y_1$，则 $S_1+3S_2=\frac{5}{2}(y_1-y_2)+\frac{3}{2}y_1=4y_1-\frac{5}{2}y_2=4y_1+\frac{50}{y_1}\geqslant2\sqrt{4y_1\cdot\frac{50}{y_1}}=20\sqrt{2}$，当且仅当 $4y_1=\frac{50}{y_1}$，即 $y_1=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立. 故选 B.

8. A 【解析】分以下四种情况：① $a_2=2a_1-12$，$a_3=2a_2-12=2(2a_1-12)-12=4a_1-36$；② $a_2=2a_1-12$，$a_3=\frac{a_2}{2}+12=\frac{2a_1-12}{2}+12=a_1+6$；③ $a_2=\frac{a_1}{2}+12$，$a_3=\frac{a_2}{2}+12=\frac{\frac{a_1}{2}+12}{2}+12=\frac{a_1}{4}+18$；④ $a_2=\frac{a_1}{2}+12$，$a_3=2a_2-12=2\left(\frac{a_1}{2}+12\right)-12=a_1+12$. 故 a_3 的可能结果有四种，每一个结果出现的概率都是 $\frac{1}{4}$. ∵ $a_1+6>a_1$，$a_1+12>a_1$，∴要使甲获胜的概率为 $\frac{3}{4}$，即 $a_3>a_1$ 的概率为 $\frac{3}{4}$，只需 $\begin{cases}4a_1-36>a_1,\\ \frac{a_1}{4}+18\leqslant a_1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}4a_1-36\leqslant a_1,\\ \frac{a_1}{4}+18>a_1,\end{cases}$ 解得 $a_1\geqslant24$ 或 $a_1\leqslant12$，故 a_1 的取值范围为 $(-\infty,12]\cup[24,+\infty)$.

9. ABD 【解析】设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，故 $\frac{abc}{\sin A\sin B\sin C}=(2R)^3=128\sqrt{2}$，解得 $R=2\sqrt{2}$，B 正确；$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{c}{2R}=\frac{1}{2}\times\frac{16\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=2$，A 正确；由 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=2$，得 $ab=\frac{4}{\sin C}\geqslant4$，C 错误；由 $\sin A>0$，$\sin B>0$，得 $(\sin A+\sin B)^2\geqslant4\sin A\sin B$，即 $\frac{(\sin A+\sin B)^2}{(\sin A\sin B)^2}\geqslant\frac{4}{\sin A\sin B}$，当且仅当 $\sin A=\sin B$ 时等号成立，由 $\sin A\sin B\sin C=\frac{1}{8}$，得 $\frac{4}{\sin A\sin B}=32\sin C$，故 $\frac{(\sin A+\sin B)^2}{(\sin A\sin B)^2}\geqslant32\sin C$，所以 $\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\right)^2\geqslant32\sin C$，D 正确. 故选 ABD.

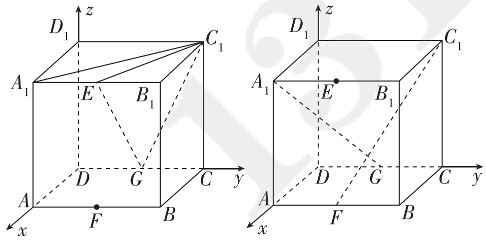
10. ABD 【解析】对于 A 选项，如图①所示，连接 A_1D，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，可知 $A_1D=A_1C_1=DC_1=6\sqrt{2}$，即 $\triangle A_1DC_1$ 为正三角形，设 M 为 DC_1 的中点，连接 A_1M，所以点 A_1 到直线 DC_1 的距离为 $A_1M=\frac{\sqrt{3}}{2}DC_1=3\sqrt{6}$，A

选项正确. 对于 B 选项, 如图②所示, 连接 EF, 由 E,F 分别为 A_1B_1, AB 的中点, 得 $EF // CC_1$ 且 $EF=CC_1$, 所以四边形 $EFCC_1$ 为平行四边形, 所以 $EC_1 // CF$, 又 $EC_1 \subset$ 平面 GEC_1, $CF \not\subset$ 平面 GEC_1, 所以 $CF //$ 平面 GEC_1, 则直线 CF 到平面 GEC_1 的距离即为点 C 到平面 GEC_1 的距离 d. 以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $C(0,6,0)$, $C_1(0,6,6)$, $E(6,3,6)$, $G(0,3,0)$, 所以 $\overrightarrow{CC_1}=(0,0,6)$, $\overrightarrow{GE}=(6,0,6)$, $\overrightarrow{EC_1}=(-6,3,0)$. 设平面 GEC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$, 则 $\begin{cases}\overrightarrow{GE}\cdot\boldsymbol{n}=6x+6z=0,\\ \overrightarrow{EC_1}\cdot\boldsymbol{n}=-6x+3y=0,\end{cases}$ 令 $x=1$, 则 $\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$, 所以 $d=\dfrac{|\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|0\times1+0\times2+6\times(-1)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\sqrt{6}$, B 选项正确.



① ②

对于 C 选项, 如图③所示, 同选项 B 建立空间直角坐标系, 则平面 GEC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$, $A_1(6,0,6)$, 则 $\overrightarrow{A_1C_1}=(-6,6,0)$, 故 $\cos\langle\overrightarrow{A_1C_1},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{A_1C_1}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{A_1C_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-6\times1+6\times2+0\times(-1)}{\sqrt{(-6)^2+6^2+0^2}\times\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$, 所以直线 A_1C_1 与平面 GEC_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$, 余弦值为 $\dfrac{\sqrt{33}}{6}$, C 选项错误. 对于 D 选项, 如图④所示, 同选项 B 建立空间直角坐标系, 则 $F(6,3,0)$, 可得 $\overrightarrow{A_1G}=(-6,3,-6)$, $\overrightarrow{C_1F}=(6,-3,-6)$, 则 $\cos\langle\overrightarrow{A_1G},\overrightarrow{C_1F}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{A_1G}\cdot\overrightarrow{C_1F}}{|\overrightarrow{A_1G}|\cdot|\overrightarrow{C_1F}|}=\dfrac{-6\times6+3\times(-3)+(-6)\times(-6)}{\sqrt{(-6)^2+3^2+(-6)^2}\times\sqrt{6^2+(-3)^2+(-6)^2}}=-\dfrac{1}{9}$, 所以直线 A_1G 与直线 C_1F 所成角的余弦值为 $\dfrac{1}{9}$, D 选项正确. 故选 ABD.



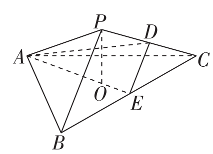
③ ④

11. AD **[解析]** 对于选项 A, 当 $\lambda=0$ 时, $f(x)=-\sin x$, 方程 $f(x)=\dfrac{1}{2}\tan x$, 即 $-\sin x=\dfrac{\frac{1}{2}\sin x}{\cos x}$, 所以 $\sin x=0$ 或 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$, 又 $x\in[0,2\pi]$, 所以 $x=0,\pi,2\pi$ 或 $x=\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}$, 故 A 正确. 对于选项 B, 当 $\lambda=1$ 时, $f(x)=\ln(x+1)-\sin x$, 则 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\cos x$, 当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 时, $-\cos x\geqslant0$, $\dfrac{1}{x+1}>0$, 所以 $f'(x)>0$, 即 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递增, 故 B 错误. 对于选项 C, 因为 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\ln\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)-1<0$, $f(\pi)=\ln(\pi+1)>0$, 由选项 B 的分析知 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 上有且仅有一个零点; 当 $x\in[\pi,+\infty)$ 时, $f(x)=\ln(x+1)-\sin x>\ln(\pi+1)-1>0$, 所以 $f(x)$ 在 $[\pi,+\infty)$ 上无零点, 所以 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},+\infty\right)$ 上有且仅有一个零点, 故 C 错误. 对于选项 D, 由 $f(x)\geqslant2(1-e^x)$, 得 $\lambda\ln(x+1)-\sin x\geqslant2(1-e^x)$, 整理得 $2e^x-\sin x+\lambda\ln(x+1)-2\geqslant0$, 令 $g(x)=2e^x-\sin x+\lambda\ln(x+1)-2$, $x\in[0,\pi]$, 则 $g'(x)=2e^x-\cos x+\dfrac{\lambda}{x+1}$. 当 $\lambda\geqslant0$ 时, 对任意的 $x\in[0,\pi]$, 都有 $\cos x\in[-1,1]$, 又 $2e^x\geqslant2$, $\dfrac{\lambda}{x+1}\geqslant0$, 所以 $g'(x)>0$, 此时 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增, 故 $g(x)\geqslant g(0)=0$, 符合题意. 当 $\lambda<0$ 时, 令 $h(x)=g'(x)$, 则 $h'(x)=2e^x+\sin x-\dfrac{\lambda}{(x+1)^2}$, 所以 $h'(x)>0$ 在 $[0,\pi]$ 上恒成立, 即 $h(x)=g'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增, $g'(0)=\lambda+1$, $g'(\pi)=2e^\pi+1+\dfrac{\lambda}{\pi+1}$, 当 $\lambda+1\geqslant0$, 即 $-1\leqslant\lambda<0$ 时, $g'(x)\geqslant0$ 在 $[0,\pi]$ 上恒成立, 此时 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增, 故 $g(x)\geqslant g(0)=0$, 符合题意. 当 $\lambda+1<0$, 即 $\lambda<-1$ 时, 若 $g'(\pi)>0$, 即 $-(\pi+1)(2e^\pi+1)<\lambda<-1$, 由函数零点存在定理知, 存在 $x_0\in(0,\pi)$, 使得 $g'(x_0)=0$, 故当 $x\in(0,x_0)$ 时, $g'(x)<0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减, 此时 $g(x)<g(0)=0$, 不合题意; 若 $g'(\pi)\leqslant0$, 即 $\lambda\leqslant-(\pi+1)(2e^\pi+1)$, 则对任意 $x\in[0,\pi]$, 恒有 $g'(x)\leqslant0$ 且 $g'(x)$ 不恒为 0, 故 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减, 所以 $g(x)\leqslant g(0)=0$, 不合题意. 综上, λ 的取值范围是 $[-1,+\infty)$, 故 D 正确. 故选 AD.

12. 35 **[解析]** 先拿出 15 盏路灯, 按如图所示的顺序排好(⊗表示灯亮, ◯表示灯灭), 则亮着的路灯被分为 5 组, 再将剩下的 3 盏亮着的路灯放进去. ⊗◯⊗⊗⊗◯⊗⊗⊗◯⊗⊗⊗◯⊗
若 3 盏路灯在 1 组, 则有 $C_5^1=5$(种)方案; 若 3 盏路灯在 2 组, 则有 $C_5^2A_2^2=20$(种)方案; 若 3 盏路灯在 3 组, 则有 $C_5^3=10$(种)方案. 所以共有 $5+20+10=35$(种)方案.

13. $\dfrac{\sqrt{33}}{3}$ **[解析]** 连接 AG, 因为 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, 所以 $\overrightarrow{PG}-\overrightarrow{PA}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PC}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PA}$, 所以 $\overrightarrow{PG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PC}$, 则 $|\overrightarrow{PG}|^2=\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PC}\right)^2=\dfrac{1}{9}\times\left(4+4+9+2\times2\times2\times\dfrac{1}{2}+2\times2\times3\times\dfrac{1}{2}\times2\right)=\dfrac{33}{9}$, 所以 $|\overrightarrow{PG}|=\dfrac{\sqrt{33}}{3}$.

14. $\dfrac{32-16\sqrt{3}}{3}\pi$ **[解析]** 如图, 取 BC 的中点 E, 连接 DE, AE, 由题知 $\triangle ABC$ 为等边三角形. 设 O 为 $\triangle ABC$ 的中心, 连接 OP, 则 O 在 AE 上. 由正三棱锥的性质可知 $OP\perp$ 平面 ABC, 设 $PA=2a$, 因为 D 是 PC 的中点, E 是 BC 的中点, 所以 $DE // PB$, $DE=a$. 因为 $AB=4$, $\triangle ABC$ 为等边三角形, 所以 $AE=2\sqrt{3}$. 因为 $AD\perp PB$, 所以 $AD\perp DE$, 所以 $AD^2=12-a^2$. 在 $\triangle PAD$ 及 $\triangle PAC$ 中, 由余弦定理得 $\cos\angle APC=\dfrac{PA^2+PD^2-AD^2}{2PA\cdot PD}=\dfrac{PA^2+PC^2-AC^2}{2PA\cdot PC}$, 即 $\dfrac{6a^2-12}{4a^2}=\dfrac{8a^2-16}{8a^2}$, 可得 $a=\sqrt{2}$, 所以 $PA=PB=PC=2\sqrt{2}$, $OP=\sqrt{PA^2-AO^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\dfrac{2}{3}\times2\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$, 所以 $V_{P\text{-}ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot OP=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times4\times4\times\sin60^\circ\times\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$. 正三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的表面积 $S=S_{\triangle ABC}+3S_{\triangle APC}=4\sqrt{3}+3\times\dfrac{1}{2}\times4\times\sqrt{8-4}=$



$4\sqrt{3}+12$. 设该正三棱锥内切球的半径为 R，由 $V_{P\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\cdot S\cdot R$ 得 $R=\frac{3V_{P\text{-}ABC}}{S}=\frac{8\sqrt{2}}{4\sqrt{3}+12}=\frac{2\sqrt{2}}{3+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}\times(3-\sqrt{3})}{6}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}$，所以该正三棱锥内切球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\times\frac{24-12\sqrt{3}}{9}=\frac{32-16\sqrt{3}}{3}\pi$.

训练 46　8 单选＋3 多选＋3 填空

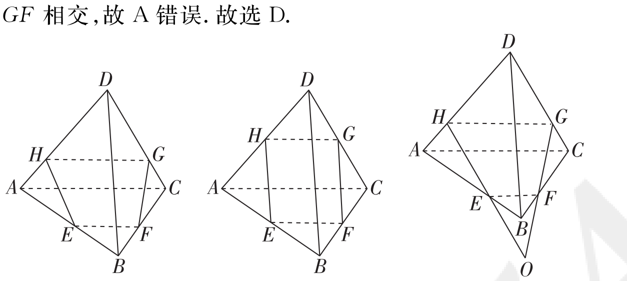
1. A 【解析】因为 $(1+i)z=3-i$，所以 $z=\frac{3-i}{1+i}=\frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-2i$，所以 $|z|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$. 故选 A.

2. D 【解析】因为 $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，且 α 为锐角，所以 $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. 故选 D.

3. A 【解析】若 $a\perp\alpha$，则 a 垂直于 α 内的所有直线，故充分性成立；若 a 垂直于 α 内无数条平行直线，则不能推出 $a\perp\alpha$，故必要性不成立. 所以“$a\perp\alpha$”是“a 垂直于 α 内无数条直线”的充分不必要条件. 故选 A.

4. C 【解析】$\because 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\geqslant 2)$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，设其公差为 d，则 $a_4-a_2=2d=4$，可得 $d=2$，又 $S_3=a_1+a_2+a_3=3a_2=9$，$\therefore a_2=3$，$\therefore a_9=a_2+(9-2)\times 2=17$. 故选 C.

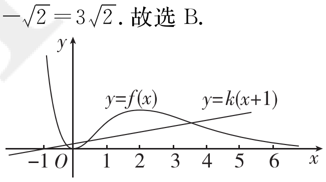
5. D 【解析】如图①，由于 $EF\,/\!/\,GH$，所以 E,F,G,H 四点确定一个平面 $EFGH$，因此直线 EH 与 FG 一定共面，故 D 正确，C 错误；如图②，当 $EF\,/\!/\,GH$ 且 $EF=GH$ 时，四边形 $EFGH$ 为平行四边形，此时 $EH\,/\!/\,GF$，故 B 错误；如图③，当 $EF\,/\!/\,GH$ 且 $EF\neq GH$ 时，四边形 $EFGH$ 为梯形，此时 EH，GF 相交，故 A 错误. 故选 D.



①　②　③

6. B 【解析】设直线 $x-y+t=0$ 与 l_1,l_2 的距离相等，则 $\frac{|t-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|t-5|}{\sqrt{2}}$，解得 $t=3$，即圆心 C_1 在直线 $x-y+3=0$ 上，则圆 C_1 的半径为 $\frac{|3-5|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. 圆 C_2：$x^2+y^2-6x+8y+23=0$ 的标准方程为 $(x-3)^2+(y+4)^2=2$，则圆 C_2 的圆心为 $C_2(3,-4)$，半径为 $\sqrt{2}$，所以圆 C_1 与圆 C_2 的圆心距的最小值即点 C_2 到直线 $x-y+3=0$ 的距离 $d=\frac{|3-(-4)+3|}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$，所以 $|PQ|_{\min}=5\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$. 故选 B.

7. A 【解析】当 $k=0$ 时，不等式 $x^2>0$ 有无数个正整数解，不满足题意. 当 $k<0$ 时，当 $x>0$ 时，不等式 $x^2-k(x+1)e^x>0$ 恒成立，有无数个正整数解，不满足题意.



当 $k>0$ 时，不等式 $x^2-k(x+1)e^x>0$ 等价于 $\frac{x^2}{e^x}>k(x+1)$，令 $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$，所以 $f'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}=\frac{x(2-x)}{e^x}$. 当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，当 $0<x<2$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，易知 $f(0)=0$，$f(2)=\frac{4}{e^2}$，当 $x>0$ 时，$f(x)>0$ 恒成立. 而方程 $y=k(x+1)$ 表示经过点 $(-1,0)$ 的直线，作出直线 $y=k(x+1)$ 及 $y=f(x)$ 的大致图象，如图所示. 由图可知，若关于 x 的不等式 $x^2-k(x+1)e^x>0$ 恰有 3 个不同的正整数解，则 $\begin{cases}k(1+1)<\frac{1}{e},\\ k(3+1)<\frac{9}{e^3},\\ k(4+1)\geqslant\frac{16}{e^4},\end{cases}$ 解得 $\frac{16}{5e^4}\leqslant k<\frac{9}{4e^3}$，故实数 k 的取值范围是 $\left[\frac{16}{5e^4},\frac{9}{4e^3}\right)$. 故选 A.

8. B 【解析】依题意得，$p_1=\frac{2}{3}$，$q_1=\frac{1}{3}$，且 $p_{n+1}=\frac{2}{3}q_n+\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)p_n+\frac{2}{3}(1-p_n-q_n)=-\frac{1}{9}p_n+\frac{2}{3}$，$q_{n+1}=\frac{1}{3}q_n+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}p_n=\frac{1}{3}q_n+\frac{2}{9}p_n$，则 $p_2=-\frac{1}{9}p_1+\frac{2}{3}=\frac{16}{27}$，$q_2=\frac{2}{9}p_1+\frac{1}{3}q_1=\frac{7}{27}$，故 A 中结论正确；显然 $2p_{n+1}+q_{n+1}-1=\frac{1}{3}q_n+\frac{1}{3}$，则数列 $\{2p_n+q_n-1\}$ 不是等比数列，故 B 中结论不正确；由 $p_{n+1}+2q_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}q_n+\frac{2}{3}$，得 $p_{n+1}+2q_{n+1}-1=\frac{1}{3}(p_n+2q_n-1)$，而 $p_1+2q_1-1=\frac{1}{3}$，因此数列 $\{p_n+2q_n-1\}$ 是首项为 $\frac{1}{3}$，公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列，故 C 中结论正确；显然 $p_n+2q_n-1=\left(\frac{1}{3}\right)^n$，因此 $E(X_n)=1\times p_n+2q_n+0\times(1-p_n-q_n)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^n$，故 D 中结论正确. 故选 B.

9. ACD 【解析】对于选项 A，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=-2n+10$，又 $a_1=S_1=9$，所以 $a_n=\begin{cases}9, n=1,\\ -2n+10, n\geqslant 2,\end{cases}$ 则 $\{a_n\}$ 是递减数列，故 A 正确；对于选项 B，$\frac{S_n}{n}=-n+\frac{1}{n}+9$，显然 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是递减数列，所以 $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{\max}=\frac{S_1}{1}=9$，故 B 错误；对于选项 C，由题意得 $\{a_n\}$ 的各项均不为 0，设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，$q\neq 0$，则 $S_{3k+3}-S_{3k}\neq 0(k\in\mathbf{N}^*)$，所以 $\frac{S_6-S_3}{S_3}=\frac{S_9-S_6}{S_6-S_3}=\cdots=\frac{S_{3n+6}-S_{3n+3}}{S_{3n+3}-S_{3n}}=q^3$，故 C 正确；对于选项 D，若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，则 $S_{3k+3}-S_{3k}=a_{3k+1}+a_{3k+2}+a_{3k+3}=3a_{3k+2}(k\in\mathbf{N}^*)$，所以 $S_3,S_6-S_3,S_9-S_6,\cdots$，即数列 $3a_2,3a_5,3a_8,\cdots$ 为等差数列，故 D 正确. 故选 ACD.

10. BCD 【解析】当 $x=-1$ 时，$y=\frac{x+1}{x}=0<2$，故 A 错误；由已知得 $x-1>0$，则 $y=2x+\frac{4}{x-1}-1=2(x-1)+\frac{4}{x-1}+1\geqslant 2\sqrt{2(x-1)\cdot\frac{4}{x-1}}+1=4\sqrt{2}+1$，当且仅当 $2(x-1)=\frac{4}{x-1}$，即 $x=\sqrt{2}+1$ 时取等号，故 B 正确；由 $x+2y=3xy$ 可得，$\frac{1}{3y}+\frac{2}{3x}=1$，所以 $2x+y=(2x+y)\left(\frac{1}{3y}+\frac{2}{3x}\right)=\frac{2x}{3y}+\frac{2y}{3x}+\frac{5}{3}\geqslant 2\sqrt{\frac{2x}{3y}\cdot\frac{2y}{3x}}+\frac{5}{3}=3$，当且仅当 $\frac{2x}{3y}=\frac{2y}{3x}$，即 $x=y=1$ 时取等号，故 C 正确；由 $9x^2+y^2+xy=1$ 可得 $(3x+y)^2=1+5xy=1+\frac{5}{12}\times 4\times 3x\times y\leqslant 1+\frac{5}{12}(3x+y)^2$，则 $\frac{7}{12}(3x+y)^2\leqslant 1$，所以 $3x+y\leqslant\sqrt{\frac{12}{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$，当且仅当 $3x=y=\frac{\sqrt{21}}{7}$ 时取等号，故 D 正确. 故选 BCD.

11. BCD 【解析】对于 A，当 P 运动到 $(t,1)$ 时，$|PF|=1+\frac{p}{2}=2$，则 $p=2$，即抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$，故 A 错误；

对于B,由抛物线 $C:x^2=4y$,得 $F(0,1)$,则 $|PM|+|PF|\geqslant|MF|=4$,当点 P 位于线段 MF 与抛物线 C 的交点处时,等号成立,故B正确;对于C,当直线 l 过焦点 F 时,设 $A(x_0,y_0)$,则 $|FA|=y_0+\frac{p}{2}=y_0+1$,故以 AF 为直径的圆的半径为 $\frac{y_0+1}{2}$,又 $F(0,1)$,所以以 AF 为直径的圆的圆心坐标为 $\left(\frac{x_0}{2},\frac{y_0+1}{2}\right)$,则圆心到 x 轴的距离与该圆半径相等,即该圆与 x 轴相切,故C正确;对于D,假设存在满足条件的直线 l,则 l 与直线 $x+y-5=0$ 垂直,则直线 l 的斜率为1,设直线 l 的方程为 $y=x+m$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}y=x+m,\\x^2=4y,\end{cases}$ 消去 y 可得 $x^2-4x-4m=0$,则 $\Delta=16+16m>0$,即 $m>-1$,所以 $x_1+x_2=4$,故 $\frac{x_1+x_2}{2}=2$,$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{x_1+m+x_2+m}{2}=2+m$,则弦 AB 的中点 $(2,2+m)$ 在直线 $x+y-5=0$ 上,所以 $2+2+m-5=0$,解得 $m=1>-1$,故存在直线 l,使得 A,B 两点关于直线 $x+y-5=0$ 对称,故D正确.故选BCD.

12. $-\frac{1}{4}$ 【解析】由 $2\sin\beta-\cos\alpha=1$,得 $2\sin\beta=1+\cos\alpha$,即 $4\sin^2\beta=1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha$①.由 $\sin\alpha+2\cos\beta=\sqrt{3}$,得 $2\cos\beta=\sqrt{3}-\sin\alpha$,即 $4\cos^2\beta=3-2\sqrt{3}\sin\alpha+\sin^2\alpha$②.
①+②得 $4=5+2\cos\alpha-2\sqrt{3}\sin\alpha=5+4\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)=5+4\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$,即 $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{1}{4}$,故 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{1}{4}$.

13. $\frac{3-\sqrt{2}}{7}$ 【解析】由题意知,$V_{C\text{-}AEF}=V_{F\text{-}ACE}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times CE\times AB\times CF=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times2\times1=\frac{1}{3}$.由 $EF=\sqrt{CE^2+CF^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,$AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,$AF=\sqrt{AB^2+BC^2+CF^2}=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$,得 $\cos\angle AEF=\frac{AE^2+EF^2-AF^2}{2AE\cdot EF}=\frac{5+2-9}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$,所以 $\sin\angle AEF=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,所以 $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AE\cdot EF\cdot\sin\angle AEF=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{3}{2}$,$S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}CE\cdot AB=\frac{1}{2}\times1\times2=1$,$S_{\triangle ECF}=\frac{1}{2}\cdot CE\cdot CF=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$,$S_{\triangle AFC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot CF=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times1=\sqrt{2}$,所以三棱锥 $C\text{-}AEF$ 的表面积 $S=\frac{3}{2}+1+\frac{1}{2}+\sqrt{2}=3+\sqrt{2}$.设三棱锥 $C\text{-}AEF$ 的内切球半径为 r,则 $V_{C\text{-}AEF}=\frac{1}{3}\times r\times(3+\sqrt{2})=\frac{1}{3}$,解得 $r=\frac{3-\sqrt{2}}{7}$.

14. e^{-3} 【解析】对任意 $x>2$,$ae^x\geqslant\ln\frac{x-2}{a}-2$ 恒成立,即对任意 $x>2$,$ae^x+x\geqslant\ln\frac{x-2}{a}+x-2=ae^{\ln\frac{x-2}{a}}+\ln\frac{x-2}{a}$ 恒成立.令 $g(x)=ae^x+x$,则 $g(x)\geqslant g\left(\ln\frac{x-2}{a}\right)$,由 $\ln\frac{x-2}{a}$ 有意义知,$\frac{x-2}{a}>0$,所以 $a>0$,因为 $a>0$,所以 $g(x)=ae^x+x$ 单调递增,则 $x\geqslant\ln\frac{x-2}{a}$,即对任意 $x>2$,$\ln a+2\geqslant\ln(x-2)-(x-2)$ 恒成立,所以 $\ln a+2\geqslant[\ln(x-2)-(x-2)]_{\max}$.令 $f(x)=\ln x-x$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$.当 $0<x<1$ 时,$f'(x)>0$,当 $x>1$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,故当 $x=1$ 时,$f(x)$ 取得最大值,则 $f(x)_{\max}=f(1)=-1$,故当 $x-2=1$,即 $x=3$ 时,$[\ln(x-2)-(x-2)]_{\max}=-1$,所以 $\ln a+2\geqslant-1$,即 $a\geqslant e^{-3}$.故实数 a 的最小值为 e^{-3}.

训练47 8单选+3多选+3填空

1. A 【解析】依题意得,$z=\frac{(2+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{10-5i}{25}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$,所以 z 在复平面内所对应的点为 $\left(\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$,位于第四象限.故选A.

2. D 【解析】因为指数函数 $y=(1-3a)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $1-3a>1$,解得 $a<0$,则实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0)$.故选D.

3. B 【解析】因为 $a_{n+1}=2a_n+2$,所以 $a_{n+1}+2=2(a_n+2)$,又因为 $a_1+2=3$,所以 $\{a_n+2\}$ 是首项为3,公比为2的等比数列,所以 $a_n+2=3\times2^{n-1}$,故 $a_n=3\times2^{n-1}-2$.故选B.

4. B 【解析】因为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$,$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$,所以 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4+4+|\boldsymbol{b}|^2=10$,所以 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$.故选B.

5. A 【解析】依题意知,函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增且是"倍增函数",则 $\begin{cases}\log_2(2^a-t)=2a,\\\log_2(2^b-t)=2b,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2^a-t=2^{2a},\\2^b-t=2^{2b},\end{cases}$ 所以 a,b 是关于 x 的方程 $2^{2x}-2^x+t=0$①的两个根.设 $m=2^x$,则 $m>0$,此时方程①为 $m^2-m+t=0$,即方程 $m^2-m+t=0$ 有两个不等的实根,且两根都大于0,可得 $\begin{cases}(-1)^2-4t>0,\\t>0,\end{cases}$ 解得 $0<t<\frac{1}{4}$,故实数 t 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.故选A.

6. C 【解析】由 $a\cos C=(4\sin A-\cos A)c$,根据正弦定理得 $\sin A\cos C=(4\sin A-\cos A)\sin C$,所以 $\sin A\cos C+\sin C\cos A=4\sin A\sin C$,即 $4\sin A\sin C=\sin(A+C)=\sin B$,所以 $4\sin A\sin C\sin B=\sin^2B$.由正弦定理得 $b^2=4ac\sin B$,由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=4ac\sin B$,所以 $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}=4\sin B+2\cos B=2\sqrt{5}\sin(B+\varphi)\leqslant2\sqrt{5}$,其中 $\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\sin\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$,当 $\sin(B+\varphi)=1$ 时等号成立,所以 $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}$ 的最大值为 $2\sqrt{5}$.故选C.

7. C 【解析】设侧面三角形底边上的高为 h,底边的长为 a,则 $\frac{1}{2}ah=\left[\sqrt{h^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right]^2$,即 $\frac{1}{2}ah=h^2-\frac{a^2}{4}$,化简得 $4h^2-2ah-a^2=0$,即 $4\left(\frac{h}{a}\right)^2-2\left(\frac{h}{a}\right)-1=0$,∴ $\frac{h}{a}=\frac{2+\sqrt{4+16}}{2\times4}=\frac{2+2\sqrt{5}}{8}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$(负值舍去).故选C.

8. C 【解析】由题得圆 $O:x^2+y^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)=\frac{1}{2}c^2$,所以圆 O 的半径为 $|OA|=|OB|=\frac{\sqrt{2}}{2}c$.过 O 作 AB 的垂线 OH,H 为垂足,则 H 为 AB 的中点,又 $\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{BP}$,所以 H 为 FP 的中点.设双曲线的右焦点为 F_1,连接 PF_1,则 OH 为 $\triangle FF_1P$ 的中位线,所以 $OH\parallel PF_1$,则 $PF_1\perp PF$.因为 $\triangle AOB$ 为等边三角形,所以 $|OH|=\frac{\sqrt{3}}{2}|OA|=\frac{\sqrt{6}}{4}c$,所以 $|PF_1|=\frac{\sqrt{6}}{2}c$,由双曲线的定义,可得 $|PF|=\frac{\sqrt{6}}{2}c+2a$,在 $\mathrm{Rt}\triangle PFF_1$ 中,由勾股定理得 $|PF|^2+|PF_1|^2=|F_1F|^2$,即 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}c+2a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}c\right)^2=4c^2$,整理得 $c^2-2\sqrt{6}ac-4a^2=0$,即 $e^2-2\sqrt{6}e-4=0$,解得 $e=\sqrt{6}+\sqrt{10}$ 或 $e=\sqrt{6}-\sqrt{10}$(舍去),所以该双曲线的离心率 $e=\sqrt{6}+\sqrt{10}$.故选C.

9. BCD 【解析】对于A,把数据从小到大排列为5,5,6,6,7,7,8,9,9,9,因为 $10\times70\%=7$,所以这组数据的第70百分位数为 $\frac{8+9}{2}=8.5$,故A错误;对于B,$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.3=0.7$,$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=0.7=P(B)$,所以

$P(AB)=P(A)P(B)$，即事件 A 与 B 相互独立，故 B 正确；对于 C，因为随机变量 $X\sim B(6,p)$，所以 $E(X)=np=6p=4.8$，则 $p=0.8$，所以 $P(X=k)=C_6^k\cdot 0.8^k\cdot(1-0.8)^{6-k}=C_6^k\dfrac{4^k}{5^6}(k=0,1,2,3,4,5,6)$，因为 $(6+1)\times0.8=5.6$，所以 $k=5$ 时，$P(X=k)$ 最大，故 $k=5$，又 $D(X)=np(1-p)=6\times0.8\times(1-0.8)=0.96$，所以 $D(kX+1)=D(5X+1)=5^2\times D(X)=25\times0.96=24$，故 C 正确；对于 D，因为二项式 $\left(ax+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的第三项和第八项的二项式系数相等，所以 $C_n^2=C_n^7$，所以 $n=2+7=9$，所以 $\left(ax+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ 的展开式的通项是 $T_{r+1}=C_9^r\times(ax)^{9-r}\times(x^{-\frac{1}{2}})^r=a^{9-r}C_9^rx^{9-\frac{3r}{2}}$，令 $9-\dfrac{3r}{2}=0$，得 $r=6$，所以展开式的常数项为 $a^{9-6}C_9^6=84a^3=84$，解得 $a=1$，故 D 正确. 故选 BCD.

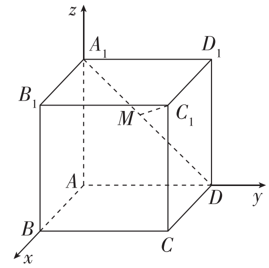
10. ABD 【解析】对于选项 A，由题可得函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，则 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant-\dfrac{\pi}{2}\omega,\dfrac{\pi}{2}\omega\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，解得 $0<\omega\leqslant1$，又因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 对称，所以 $\dfrac{2\pi}{3}\omega=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=\dfrac{3}{4}+\dfrac{3k}{2},k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=\dfrac{3}{4}$，故 A 正确；对于选项 B，由 A 可知 $f(x)=\sin\dfrac{3}{4}x$，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{2\pi}{3}$ 个单位长度后，所得图象对应的函数解析式为 $g(x)=\sin\left(\dfrac{3}{4}x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos\dfrac{3}{4}x$，显然 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称，故 B 正确；对于选项 C，令 $t=\dfrac{3}{4}x$，$x\in\left(a,\dfrac{14\pi}{9}\right)$，则 $t\in\left(\dfrac{3}{4}a,\dfrac{7\pi}{6}\right)$，因为函数 $f(x)$ 在区间 $\left(a,\dfrac{14\pi}{9}\right)$ 上没有最小值，所以 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{3}{4}a<\dfrac{7\pi}{6}$，解得 $-\dfrac{2\pi}{3}\leqslant a<\dfrac{14\pi}{9}$，即实数 a 的取值范围为 $\left[-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{14\pi}{9}\right)$，故 C 错误；对于选项 D，因为 $x=\dfrac{4\pi}{3}$，$x=0$ 为函数 $f(x)$ 的 2 个零点，所以 $-\pi\leqslant\dfrac{3}{4}m<0$，解得 $-\dfrac{4\pi}{3}\leqslant m<0$，即实数 m 的取值范围为 $\left[-\dfrac{4\pi}{3},0\right)$，故 D 正确. 故选 ABD.

11. ACD 【解析】因为 $b>0$，所以 $b<2b$，又函数 $y=\log_2x$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\log_2b<\log_2(2b)$，所以 $2^a+\log_2a=2^{2b}+\log_2b<2^{2b}+\log_2(2b)$，令 $f(x)=2^x+\log_2x$，又因为 $y=2^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)=2^x+\log_2x$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因为 $2^a+\log_2a<2^{2b}+\log_2(2b)$，即 $f(a)<f(2b)$，所以 $a<2b$，故 A 中结论错误，B 中结论正确；令 $g(x)=2^{2x}+\log_2x$，易知 $g(x)=2^{2x}+\log_2x$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上单调递增，取 $a=1$，则 $2^a+\log_2a=2$，此时 $2=g(b)<g(1)=4$，所以 $0<b<1$，所以 $a>b^2$，故 D 中结论错误；令 $b=4$，则 $2^{2b}+\log_2b=258$，此时 $f(16)=2^{16}+4>f(a)=258$，所以 $0<a<16$，所以 $a<b^2$，故 C 中结论错误. 故选 ACD.

12. $\left(x+\dfrac{5}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{16}{9}$ 【解析】依题意得，$|PB|=2|PA|$，即 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2\sqrt{(x+1)^2+y^2}$，两边平方化简得 $\left(x+\dfrac{5}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{16}{9}$，故轨迹 C 的方程为 $\left(x+\dfrac{5}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{16}{9}$.

13. 7 【解析】因为 $T=C_{35}^0+C_{35}^2+C_{35}^4+\cdots+C_{35}^{34}=2^{34}=2\times(9-1)^{11}=2\times[C_{11}^0\times9^{11}-C_{11}^1\times9^{10}+C_{11}^2\times9^9+\cdots+(-1)^r\cdot C_{11}^r\times9^{11-r}+\cdots+C_{11}^{10}\times9^1-C_{11}^{11}\times9^0]=2\times[C_{11}^0\times9^{11}-C_{11}^1\times9^{10}+C_{11}^2\times9^9+\cdots+(-1)^r\cdot C_{11}^r\times9^{11-r}+\cdots+C_{11}^{10}\times9^1-1]$，其中 $C_{11}^0\times9^{11}-C_{11}^1\times9^{10}+C_{11}^2\times9^9+\cdots+(-1)^r\cdot C_{11}^r\times9^{11-r}+\cdots+C_{11}^{10}\times9^1=(C_{11}^0\times9^{10}-C_{11}^1\times9^9+C_{11}^2\times9^8+\cdots+(-1)^r\cdot C_{11}^r\times9^{10-r}+\cdots+C_{11}^{10})\times9$，令 $k=C_{11}^0\times9^{10}-C_{11}^1\times9^9+C_{11}^2\times9^8+\cdots+(-1)^r\cdot C_{11}^r\times9^{10-r}+\cdots+C_{11}^{10}$，所以 $T=2(9k-1)=9(2k-1)+7$，其中 $k\in\mathbf{N}$，所以 T 被 9 除的余数是 7.

14. $\sqrt{2}$ 【解析】以 A 为原点，AB,AD,AA_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，如图所示，则 $A(0,0,0)$，$D(0,2,0)$，$A_1(0,0,2)$，$C_1(2,2,2)$，$D_1(0,2,2)$，所以 $\overrightarrow{DA_1}=(0,-2,2)$，设 $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{DA_1}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{DM}=(0,-2\lambda,2\lambda)$，所以 $M(0,2-2\lambda,2\lambda)$，因为 $\overrightarrow{C_1D_1}=(-2,0,0)$，所以 $\boldsymbol{u}=\dfrac{\overrightarrow{C_1D_1}}{|\overrightarrow{C_1D_1}|}=\dfrac{(-2,0,0)}{2}=(-1,0,0)$，连接 C_1M，设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{C_1M}=(-2,-2\lambda,2\lambda-2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}=2$，所以点 M 到直线 C_1D_1 的距离 $d=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}=\sqrt{4+4\lambda^2+(2\lambda-2)^2-4}=\sqrt{8\lambda^2-8\lambda+4}=\sqrt{8\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\right)^2+2}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，所以当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，$d_{\min}=\sqrt{2}$，故点 M 到直线 C_1D_1 的距离的最小值为 $\sqrt{2}$.



训练 48　8 单选 + 3 多选 + 3 填空

1. D 【解析】$A=\{x|(\log_2x)^2-3\log_2x<0\}=\{x|0<\log_2x<3\}=\{x|1<x<8\}$，令 $1<3x-1<8$，且 $x\in\mathbf{N}$，解得 $x=1$ 或 2，此时 $y=3x-1=2$ 或 5，所以 $A\cap B=\{2,5\}$. 故选 D.

2. C 【解析】由 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}|$ 可得 $\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}^2+8\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+16\boldsymbol{b}^2$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=0$，又因为 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{-|\boldsymbol{b}|^2}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=-\dfrac{1}{2}$，又 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{2\pi}{3}$. 故选 C.

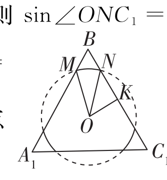
3. D 【解析】由题图可得 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，即 $f(x)$ 为偶函数. A 选项中，$f(-x)=e^{\frac{1}{|-x|}}\cdot\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}x\right)=-e^{\frac{1}{|x|}}\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}x=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数，与图象不符，故排除 A；C 选项中，$f(-x)=\ln|-x|\cdot\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}x\right)=-\ln|x|\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}x=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数，与图象不符，故排除 C；B 选项中，当 $x\in(0,1)$ 时，$e^{\frac{1}{|x|}}>0$，$\cos\dfrac{\pi}{2}x>0$，则 $f(x)>0$，与图象不符，故排除 B. 故选 D.

4. A 【解析】因为 $x<0,y<0$，所以 $4^x+2^y=2^{2x}+2^y\geqslant2\sqrt{2^{2x}\cdot2^y}=2\sqrt{2^{2x+y}}=1$，当且仅当 $2^{2x}=2^y$，即 $2x=y=-1$ 时，等号成立，故选 A.

5. A 【解析】记事件 A = “一次性饮酒 4.8 两未诱发这种疾病”，事件 B = “一次性饮酒 7.2 两未诱发这种疾病”，显然 $B\subseteq A$，$AB=A\cap B=B$，$P(A)=1-0.04=0.96$，$P(B)=1-0.16=0.84$，所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)}{P(A)}=\dfrac{0.84}{0.96}=\dfrac{7}{8}$. 故选 A.

6. A 【解析】设点 B_1 到平面 A_1BC_1 的距离为 d，由 $V_{C_1\text{-}A_1B_1B}=V_{B_1\text{-}A_1C_1B}$，得 $\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle A_1B_1B}\cdot B_1C_1=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle A_1C_1B}\cdot d$，即 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\sqrt{3}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times d$，解得 $d=1$，

∴以点 B_1 为球心，$\sqrt{2}$ 为半径的球被平面 A_1BC_1 所截得的圆的半径为 $\sqrt{(\sqrt{2})^2-1^2}=1$. 等边三角形 A_1BC_1 的内切圆半径为 $\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}<1$，则点 Q 的轨迹是以 $\triangle A_1BC_1$ 的中心 O 为圆心，1 为半径的圆在 $\triangle A_1BC_1$ 上及其内部的部分，设 Q 的轨迹与 A_1B，BC_1 的一个交点分别为 M,N，如图，连接 OM,ON，作 $OK\perp BC_1$，垂足为 K，则 $\sin\angle ONC_1=\dfrac{OK}{ON}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\angle ONC_1=\dfrac{\pi}{4}$，可得 $\angle ONB=\dfrac{3\pi}{4}$，则 $\angle MON=2\pi-\dfrac{3\pi}{4}\times2-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$，故点 Q 的轨迹长度为 $\dfrac{\pi}{6}\times1\times3=\dfrac{\pi}{2}$. 故选 A.



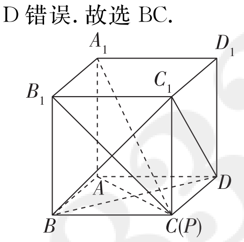
7. C 【解析】因为椭圆 C 的一个长轴端点到一个短轴端点的距离大于其焦距，所以 $\sqrt{a^2+b^2}>2\sqrt{a^2-b^2}$，整理得 $\dfrac{a^2}{b^2}<$

$\frac{5}{3}$. 因为 $y=\frac{x+1}{2x-1}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4x-2}$ 的图象是由奇函数 $y=\frac{3}{4x}$ 的图象先向右平移$\frac{1}{2}$个单位长度,再向上平移$\frac{1}{2}$个单位长度得到的,所以曲线 $y=\frac{x+1}{2x-1}$关于点$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$对称,故$P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. 将点 P 的坐标代入椭圆 C 的方程,得$\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}=1$,等号两边同时乘 a^2 并整理,得 $a^2=\frac{1}{4}+\frac{a^2}{4b^2}<\frac{1}{4}+\frac{5}{12}=\frac{2}{3}$,所以椭圆 C 的长轴长 $2a<2\times\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. 又 $a>b$,所以$\frac{a^2}{b^2}>1$,所以 $a^2=\frac{1}{4}+\frac{a^2}{4b^2}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$,所以 $2a>\sqrt{2}$. 综上,椭圆 C 的长轴长的取值范围是$\left(\sqrt{2},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. 故选 C.

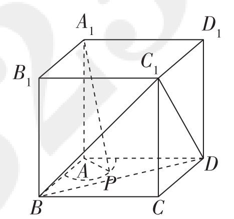
8. C 【解析】由题意可知$\frac{2\pi}{\omega}=2\times\frac{\pi}{2}$,得 $\omega=2$,则 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$,则 $g(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\varphi\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}+\varphi\right)$,因为 $g(x)$为偶函数,所以$|g(0)|=\left|\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)\right|=1$,又 $0<\varphi<\pi$,所以$\frac{\pi}{6}+\varphi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$,所以$\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,故 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,可得 $h(x)=2f(x)+1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$. 由 $h(x)=0$ 得 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$,故 $2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{7\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$ 或 $2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{11\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $x=k\pi+\frac{5\pi}{12}$,$k\in\mathbf{Z}$ 或 $x=k\pi+\frac{3\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $h(x)$的相邻两个零点 x_1,x_2 满足$|x_1-x_2|=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$. 若 $b-a$ 最小,则 a 和 b 都是$h(x)$的零点,此时在区间$[a,\pi+a]$,$[a,2\pi+a]$,…,$[a,s\pi+a]$$(s\in\mathbf{N}^*)$上分别恰有 3,5,…,$2s+1$ 个零点,所以在区间$[a,14\pi+a]$上恰有 29 个零点,从而在区间$(14\pi+a,b]$上至少有 1 个零点,所以 $b-a-14\pi\geqslant\frac{\pi}{3}$,所以 $b-a$ 的最小值为 $14\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{43\pi}{3}$. 故选 C.

9. CD 【解析】由已知得 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$,所以$\frac{a_{n+1}-2}{a_n-2}=\frac{\sqrt{a_n+2}-2}{a_n-2}=\frac{1}{\sqrt{a_n+2}+2}>0$,故 $a_{n+1}-2$ 与 a_n-2 同号,即 a_n-2 与 a_1-2 同号. 若 $a_1\in(0,2)$,则 $a_1-2<0$,所以 $a_n-2<0$,即 $a_n<2$,所以 $a_{n+1}^2-a_n^2=a_n+2-a_n^2=-(a_n-2)(a_n+1)>0$,故 $a_{n+1}>a_n$,数列$\{a_n\}$为递增数列,A 错误;若 $a_1\in(2,+\infty)$,则 $a_1-2>0$,所以 $a_n>2$,可得 $a_{n+1}<a_n$,数列$\{a_n\}$为递减数列,B 错误;由 B 中分析可知,当 $a_1\in(2,+\infty)$时,$2<a_n<a_1$,C 正确;若 $a_1=1$,则 $a_n<2$,$\frac{a_{n+1}-2}{a_n-2}=\frac{\sqrt{a_n+2}-2}{a_n-2}=\frac{1}{\sqrt{a_n+2}+2}>\frac{1}{4}$,故 $a_{n+1}-2<\frac{1}{4}(a_n-2)$,当 $n\geqslant2$ 时,$a_n-2<\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(a_1-2)=-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$,故 $a_n<2-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(n\geqslant2)$,又 $a_1=1=2-\left(\frac{1}{4}\right)^{1-1}$,所以 $a_n\leqslant2-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$,所以 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant2n-\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}=2n-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n\leqslant2n-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\times\frac{1}{4}=2n-1$,D 正确. 故选 CD.

10. BC 【解析】由题意得点 P 在正方形 $ABCD$ 的内部(包括边界). 对于 A,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$A_1B_1\perp$平面 BCC_1B_1,若 $A_1P\perp$平面 BCC_1B_1,则点 P 在直线 A_1B_1 上,不符合题意,A 错误. 对于 B,如图①,当 $\lambda=\mu=1$ 时,P 与 C 重合,连接 AC,B_1C,∵四边形 $ABCD$ 是正方形,∴$BD\perp AC$,∵$AA_1\perp$平面 $ABCD$,$BD\subset$平面 $ABCD$,∴$BD\perp AA_1$,又 $AA_1\cap AC=A$,AA_1,$AC\subset$平面 ACA_1,∴$BD\perp$平面 ACA_1,∵$A_1P\subset$平面 ACA_1,∴$BD\perp A_1P$. ∵四边形 BCC_1B_1 是正方形,∴$BC_1\perp B_1C$,∵$A_1B_1\perp$平面 BCC_1B_1,$BC_1\subset$平面 BCC_1B_1,∴$BC_1\perp A_1B_1$,又 $A_1B_1\cap B_1C=B_1$,A_1B_1,$B_1C\subset$平面 A_1B_1C,∴$BC_1\perp$平面 A_1B_1C,∵$A_1P\subset$平面 A_1B_1C,∴$BC_1\perp A_1P$. ∵$BD\cap BC_1=B$,BD,$BC_1\subset$平面 BDC_1,∴$A_1P\perp$平面 BDC_1,故存在点 P,使得 $A_1P\perp$平面 BDC_1,B 正确. 对于 C,D,如图②,当 $A_1P=\sqrt{5}$时,$AP=\sqrt{A_1P^2-AA_1^2}=1$,则 P 的轨迹是以 A 为圆心,圆心角为$\frac{\pi}{2}$,半径为 1 的圆弧,设$\angle PAB=\alpha$,$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,∵$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$,∴$|\overrightarrow{AP}|\cos\alpha=\lambda|\overrightarrow{AB}|$,$|\overrightarrow{AP}|\sin\alpha=\mu|\overrightarrow{AD}|$,得 $\lambda=\frac{\cos\alpha}{2}$,$\mu=\frac{\sin\alpha}{2}$,∴$\sqrt{3}\lambda+\mu=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$,由 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,得 $\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$,则$\sqrt{3}\lambda+\mu=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$,C 正确,D 错误. 故选 BC.



①



②

11. BC 【解析】易知 $f(x)$的图象与 $f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{4}$对称,$f'(x)=a\cos x+b\sin x$,且 $f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=a\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-b\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-a\cos x+b\sin x\neq f'(x)$,故 A 选项错误;$f(x)+f'(x)=(a+b)\sin x+(a-b)\cos x=\sqrt{(a+b)^2+(a-b)^2}\sin(x+\varphi)$,其中 $\tan\varphi=\frac{a-b}{a+b}$,∴$f(x)+f'(x)$的最大值为$\sqrt{(a+b)^2+(a-b)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$,$f(x)-f'(x)=(a-b)\sin x-(a+b)\cos x=\sqrt{(a-b)^2+(a+b)^2}\sin(x-\theta)$,其中 $\tan\theta=\frac{a+b}{a-b}$,∴$f(x)-f'(x)$的最大值为$\sqrt{(a-b)^2+(a+b)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$,故 B 选项正确;∵$f'(x)=a\cos x+b\sin x$,∴将 $f'(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度,得 $y=a\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+b\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=a\sin x-b\cos x$ 的图象,即 $f(x)$的图象,故 C 选项正确;当 $a=b$ 时,$f(x)+f'(x)=2a\sin x$,$f(x)-f'(x)=-2a\cos x$,当 $a>0$ 时,$y=f(x)+f'(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,$y=f(x)-f'(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,当 $a<0$ 时,$y=f(x)+f'(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减,$y=f(x)-f'(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减,综上可知,当 $a=b$ 时,$y=f(x)+f'(x)$和 $y=f(x)-f'(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上的单调性相同,但可能单调递增也可能单调递减,故 D 选项错误. 故选 BC.

12. 30 【解析】$(x^2+x+y)^5$表示 5 个因式(x^2+x+y)的乘积,在这 5 个因式中,有 2 个因式选"y",1 个因式选"x",剩下的 2 个因式选"x^2",即可得到含 x^5y^2 的项,故展开式中含 x^5y^2 的项的系数是 $C_5^2\cdot C_3^1\cdot C_2^2=30$.

13. $-\frac{3}{4}$ 【解析】直线 l 的方程为$(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0$,即 $m(2x+y-7)+x+y-4=0$,令$\begin{cases}2x+y-7=0,\\x+y-4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$故直线 l 过定点 $P(3,1)$. 因为

点 $P(3,1)$在圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=25$ 内,$C(1,2)$,所以当直线 l 被圆 C 截得的弦长最短时,$PC\perp l$,此时,直线 l 的斜率存在,即 $m\neq-1$,则 $k_{PC}\cdot k_l=\frac{2-1}{1-3}\cdot\left(-\frac{2m+1}{m+1}\right)=-1$,解得 $m=-\frac{3}{4}$.

14. $-\ln 2$ **【解析】** 因为 $t>\frac{1}{2}$,所以 $h(t)=e^{t-1}>e^{-\frac{1}{2}}$,$2t-1>0$,$g(t)$的值域是$(-\infty,+\infty)$. 设 $h(t_1)=g(t_2)=m$,则 $m>e^{-\frac{1}{2}}$,$e^{t_1-1}=m$,即 $t_1=\ln m+1$,$\ln(2t_2-1)+2=m$,即 $t_2=\frac{1}{2}e^{m-2}+\frac{1}{2}$,所以 $t_2-t_1=\frac{1}{2}e^{m-2}+\frac{1}{2}-\ln m-1=\frac{1}{2}e^{m-2}-\ln m-\frac{1}{2}$. 设 $f(x)=\frac{1}{2}e^{x-2}-\ln x-\frac{1}{2}\left(x>e^{-\frac{1}{2}}\right)$,则 $f'(x)=\frac{1}{2}e^{x-2}-\frac{1}{x}$,设 $F(x)=f'(x)$,则 $F'(x)=\frac{1}{2}e^{x-2}+\frac{1}{x^2}>0$,所以 $f'(x)$是增函数,又 $f'(2)=0$,所以当 $e^{-\frac{1}{2}}<x<2$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,当 $x>2$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,所以 $f(x)_{\min}=f(2)=\frac{1}{2}-\ln 2-\frac{1}{2}=-\ln 2$,所以 t_2-t_1 的最小值是$-\ln 2$.

训练 49　8 单选+3 多选+3 填空

1. C **【解析】** 由题意可得 $M=\{4,6\}$,则 $4\in M$,$6\in M$,故选 C.

2. A **【解析】** $\frac{25i}{3+4i}=\frac{25i(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=4+3i$,所以虚部是 3. 故选 A.

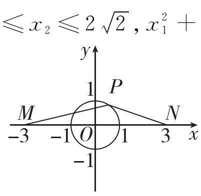
3. D **【解析】** $\because\log_b a=\frac{4}{9}\log_a b$,$\therefore(\log_b a)^2=\frac{4}{9}$,又 $a>1$,$b>1$,$\therefore\log_b a>0$,$\therefore\log_b a=\frac{2}{3}$,$\therefore a=b^{\frac{2}{3}}$,即 $a^3=b^2$. 故选 D.

4. C **【解析】** 因为$\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$,所以 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OH}$ 的夹角为$\frac{\pi}{4}$,A 选项错误. 由于四边形 $ODEF$ 不是平行四边形,所以 $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF}\neq\overrightarrow{OE}$,B 选项错误. 连接 AC,易知$\triangle AOC$ 是等腰直角三角形,所以$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$,$|\overrightarrow{DH}|=2$,所以$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{CA}|=\frac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{DH}|$,C 选项正确. 结合图象可知 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OD}$ 上的投影向量与 $\overrightarrow{OD}$ 的方向相反,所以 D 选项错误. 故选 C.

5. C **【解析】** 从五个数中随机删去两个数,则删去的两个数的可能结果为(1,3),(1,5),(1,7),(1,9),(3,5),(3,7),(3,9),(5,7),(5,9),(7,9),共 10 种,要使剩下的三个数的平均数大于 5,则删去的两个数的可能结果是(1,3),(1,5),(1,7),(3,5),共 4 种,所以剩下的三个数的平均数大于 5 的概率 $P=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$,故选 C.

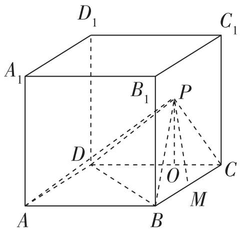
6. D **【解析】** 方法一:$\sqrt{(\cos\alpha-3)^2+\sin^2\alpha}+\sqrt{(\cos\alpha+3)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{2}\left(\sqrt{5-3\cos\alpha}+\sqrt{5+3\cos\alpha}\right)$,令 $x=3\cos\alpha$,则 $x\in[-3,3]$. 设 $f(x)=\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\ (-3\leqslant x\leqslant 3)$,则 $f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}+\frac{1}{2\sqrt{5+x}}=\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}{2\sqrt{25-x^2}}$,所以当 $x\in[-3,0]$时,$f'(x)\geqslant 0$,$f(x)$单调递增,当 $x\in(0,3]$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,所以 $f(x)$的最大值为 $f(0)=2\sqrt{5}$,所以所求的最大值为 $2\sqrt{10}$.

方法二:$\sqrt{(\cos\alpha-3)^2+\sin^2\alpha}+\sqrt{(\cos\alpha+3)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{2}\left(\sqrt{5-3\cos\alpha}+\sqrt{5+3\cos\alpha}\right)$,设 $\sqrt{5-3\cos\alpha}=x_1$,$\sqrt{5+3\cos\alpha}=x_2$,则$\sqrt{2}\leqslant x_1\leqslant 2\sqrt{2}$,$\sqrt{2}\leqslant x_2\leqslant 2\sqrt{2}$,$x_1^2+x_2^2=10$,所以 $x_1+x_2\leqslant\sqrt{2(x_1^2+x_2^2)}=2\sqrt{5}$,当且仅当 $x_1=x_2$ 时取等号,所以所求的最大值为 $2\sqrt{10}$.



方法三:设 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$,$M(-3,0)$,$N(3,0)$,则 $\sqrt{(\cos\alpha-3)^2+\sin^2\alpha}+\sqrt{(\cos\alpha+3)^2+\sin^2\alpha}$的几何意义为单位圆上的动点 P 到两个定点 M,N 的距离之和$|PM|+|PN|$.

如图,设$|PM|+|PN|=2a$,则分别以 M,N 为左、右焦点,$2a$ 为长轴长的椭圆与单位圆有公共点 P. 设椭圆的短轴长为 $2b$,则 $a^2=b^2+9$,所以当 b 最大时,a 最大,所以当点 P 在 y 轴上时 $2a$ 取得最大值,最大值为 $2\sqrt{1+9}=2\sqrt{10}$,即所求的最大值为 $2\sqrt{10}$. 故选 D.



7. D **【解析】** 因为在棱长为 6 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,M 是 BC 的中点,点 P 是正方形 DCC_1D_1 内(包括边界)的动点,且满足$\angle APD=\angle MPC$,所以 Rt$\triangle APD\backsim$Rt$\triangle MPC$,所以 $\frac{AD}{MC}=\frac{PD}{PC}=2$,即 $PD=2PC$. 如图,过点 P 作 $PO\perp DC$,交 DC 于点 O,则易知 PO 为三棱锥 $P\text{-}BCD$ 的高,欲使三棱锥 $P\text{-}BCD$ 的体积最大,只需高 PO 最大. 设 $DO=x(0\leqslant x\leqslant 6)$,$PO=h$,又 $PD=2PC$,所以 $\sqrt{x^2+h^2}=2\sqrt{(6-x)^2+h^2}$,化简得 $h^2=-x^2+16x-48(0\leqslant x\leqslant 6)$,由二次函数的性质可知,当 $x=6$ 时,h^2 取得最大值 12,所以 h 的最大值为 $2\sqrt{3}$,即三棱锥 $P\text{-}BCD$ 的高 PO 的最大值为 $2\sqrt{3}$,所以三棱锥 $P\text{-}BCD$ 的体积的最大值为$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 6\times 6\right)\times 2\sqrt{3}=12\sqrt{3}$. 故选 D.

8. A **【解析】** 由题意可知,$f(x)=1-\frac{a}{x}-\ln x$ 的定义域为$(0,+\infty)$,且 $f'(x)=\frac{-x+a}{x^2}$,当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)<0$,可知 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,所以 $f(x)$不可能存在两个零点,不合题意. 当 $a>0$ 时,令 $f'(x)<0$,得 $x>a$,令 $f'(x)>0$,得 $0<x<a$,所以 $f(x)$在$(0,a)$上单调递增,在$(a,+\infty)$上单调递减,则 $f(x)$的最大值为 $f(a)$. 若 $f(x)$存在两个零点,则 $f(a)=-\ln a>0$,解得 $0<a<1$. 当 $0<a<1$ 时,$0<\frac{a^2}{2}<a<1<e$,可得 $f(e)=-\frac{a}{e}<0$,且 $f\left(\frac{a^2}{2}\right)=1-\frac{2}{a}-\ln\frac{a^2}{2}$. 令 $m(a)=1-\frac{2}{a}-\ln\frac{a^2}{2}$,$a\in(0,1)$,则 $m'(a)=\frac{2}{a^2}-\frac{2}{a}=\frac{2(1-a)}{a^2}>0$,所以 $m(a)$在$(0,1)$上单调递增,可得 $m(a)<m(1)=-1+\ln 2<0$,即 $f\left(\frac{a^2}{2}\right)<0$,可知 $f(x)$在$(0,a)$,$(a,+\infty)$上均只有一个零点,即 $0<a<1$ 符合题意. 综上所述,实数 a 的取值范围为$(0,1)$. 故选 A.

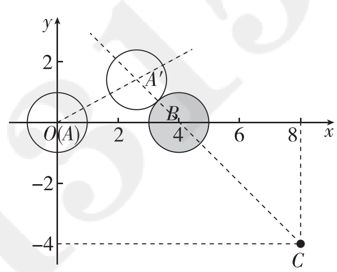
9. ABC **【解析】** 对于 A,由题意知,当 n 为偶数时,$a_n<0<a_1$;当 n 为奇数时,$a_n>0$,又 $a_{n+2}-a_n=a_n(q^2-1)<0$,$\therefore a_{n+2}<a_n<\cdots<a_1$. 综上所述,数列$\{a_n\}$的最大项为 a_1,A 正确. 对于 B,当 n 为偶数时,$a_n<0$,又 $a_{n+2}-a_n=a_n(q^2-1)>0$,$\therefore a_{n+2}>a_n>\cdots>a_2$;当 n 为奇数时,$a_n>0>a_2$. 综上所述,数列$\{a_n\}$的最小项为 a_2,B 正确. 对于 C,$\because a_na_{n+1}=a_n^2q$,$a_{n+1}a_{n+2}=a_{n+1}^2q$,$\therefore a_{n+1}a_{n+2}-a_na_{n+1}=q(a_{n+1}^2-a_n^2)=q(q^2-1)a_n^2$,$\because -1<q<0$,$\therefore q^2-1<0$,$\therefore a_{n+1}a_{n+2}-a_na_{n+1}>0$,$\therefore$数列$\{a_na_{n+1}\}$为递增数列,C 正确. 对于 D,$\because a_{2n-1}+a_{2n}=a_{2n-1}(1+q)$,$a_{2n+1}+a_{2n+2}=a_{2n+1}(1+q)$,$\therefore(a_{2n+1}+a_{2n+2})-(a_{2n-1}+a_{2n})=(1+q)(a_{2n+1}-a_{2n-1})=(1+q)(q^2-1)a_{2n-1}$,$\because -1<q<0$,$\therefore 1+q>0$,$q^2-1<0$,又 $a_{2n-1}>0$,$\therefore(a_{2n+1}+a_{2n+2})-(a_{2n-1}+a_{2n})<0$,$\therefore$数列$\{a_{2n-1}+a_{2n}\}$为递减数列,D 错误. 故选 ABC.

10. AC **【解析】** 由题意得$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\frac{\pi}{4}}=4p$,直线 l 的方程

为 $y=x-\frac{p}{2}$，即 $x-y-\frac{p}{2}=0$，则点 O 到直线 AB 的距离是 $\frac{\left|-\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}p$，所以 $\frac{1}{2}\times 4p\times\frac{\sqrt{2}}{4}p=2\sqrt{2}$，得 $p=2$，所以 $|AB|=8$，$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}=1$，$|AF|=\frac{p}{1-\cos\frac{\pi}{4}}=2(2+\sqrt{2})$，所以 A，C 正确. 故选 AC.

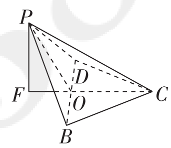
11. ACD 【解析】对于 A，若 $f(x)=x^3$，则 $f'(x)=3x^2$，$f''(x)=6x$，则 $K(x)=\frac{|6x|}{[1+(3x^2)^2]^{1.5}}$，又 $K(-x)=K(x)$，所以 $K(x)$ 为偶函数，所以 $K(-a)=K(a)$，即曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-a,-a^3)$ 与点 (a,a^3) 处的弯曲程度相同，故 A 正确；对于 B，设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，则 $f'(x)=2ax+b$，$f''(x)=2a$，则 $K(x)=\frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{1.5}}$，当且仅当 $2ax+b=0$，即 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，曲线 $y=f(x)$ 的曲率取得最大值，故 B 错误；对于 C，若 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x$，$f''(x)=-\sin x$，则 $K(x)=\frac{|-\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{1.5}}$，令 $t=|\sin x|$，则 $t\in[0,1]$，$K(x)=g(t)=\frac{t}{(2-t^2)^{1.5}}$，易知函数 $g(t)=\frac{t}{(2-t^2)^{1.5}}$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，又 $g(0)=0$，$g(1)=1$，所以 $g(t)$ 的值域为 $[0,1]$，即 $K(x)$ 的值域为 $[0,1]$，故 C 正确；对于 D，若 $f(x)=\frac{1}{x}(x>0)$，则 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，$f''(x)=\frac{2}{x^3}$，则 $K(x)=\frac{\frac{2}{x^3}}{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{1.5}}=\frac{2}{\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^3}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{\left(2\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{x^2}}\right)^3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，故 D 正确. 故选 ACD.

12. $y=\frac{2\sqrt{2}+1}{7}x$ 【解析】易知过点 $B(4,0)$，$C(8,-4)$ 的直线的方程为 $x+y-4=0$. 如图所示，可知当 A，B 两球碰撞时，球 A 的球心在直线 $x+y-4=0$ 上，且在第一象限，设 A，B 两球碰撞时，球 A 的球心位置为 $A'(a,b)$，此时 $|A'B|=2$，则 $\begin{cases}a+b-4=0,\\ \sqrt{(a-4)^2+b^2}=2,\\ a>0,b>0,\end{cases}$ 解得 $a=4-\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$，即 A，B 两球碰撞时，球 A 的球心位置为 $A'(4-\sqrt{2},\sqrt{2})$，所以母球 A 的球心运动路径所在直线的方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}x$，即 $y=\frac{2\sqrt{2}+1}{7}x$.

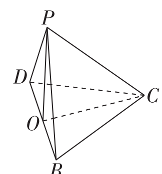


13. $[1,+\infty)$ 【解析】由 $e^{ax}\geqslant\frac{\ln x}{a}$ 恒成立，可得 $a>0$. 令 $h(x)=x+\frac{1}{a}-\frac{\ln x}{a}$，则 $h'(x)=1-\frac{1}{ax}(x>0)$，令 $h'(x)>0$ 得 $x>\frac{1}{a}$，令 $h'(x)<0$ 得 $0<x<\frac{1}{a}$，所以 $h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{2}{a}+\frac{\ln a}{a}\geqslant 0$，得 $a\geqslant\frac{1}{e^2}$. 令 $p(x)=e^{ax}-\left(x+\frac{1}{a}\right)$，则 $p'(x)=ae^{ax}-1$，由 $p'(x)=0$ 可得 $x=-\frac{\ln a}{a}$，当 $x\in\left(-\infty,-\frac{\ln a}{a}\right)$ 时，$p'(x)<0$，当 $x\in\left(-\frac{\ln a}{a},+\infty\right)$ 时，$p'(x)>0$，$\therefore p(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{\ln a}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{\ln a}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，$\therefore p(x)_{\min}=p\left(-\frac{\ln a}{a}\right)=\frac{\ln a}{a}\geqslant 0$，得 $a\geqslant 1$. 综上，$a\geqslant 1$.

14. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\frac{\pi}{3}$ 【解析】如图①，取 BD 的中点为 O，连接 OC，OP，过点 P 作 $PF\perp CO$ 交 CO 的延长线于点 F，易证 $PF\perp$ 平面 BCD，由 $OC\perp BD$，$OP\perp BD$，可得 $\angle POC$ 是二面角 $P\text{-}BD\text{-}C$ 的平面角，当 $\angle POC=120^\circ$ 时，$\angle POF=60^\circ$，因为菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle DAB=60^\circ$，所以 $PO=\sqrt{3}$，$PF=PO\sin 60^\circ=\frac{3}{2}$，故三棱锥 $P\text{-}BCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}S_{\triangle DBC}\cdot PF=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 当三棱锥 $P\text{-}BCD$ 的体积为 1 时，$\frac{1}{3}S_{\triangle DBC}\cdot PF=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times PF=1$，解得 $PF=\sqrt{3}$，则 $OF=\sqrt{OP^2-PF^2}=\sqrt{3-3}=0$，即 O，F 两点重合，即 $PO\perp$ 平面 BCD，如图②，以 P 为球心，PB 的长为半径的球面被平面 BCD 所截得的曲线为以 O 为圆心，半径为 $\sqrt{PB^2-PO^2}=1$ 的圆，其中在 $\triangle BCD$ 内部的长为圆心角为 $\frac{\pi}{3}$，半径为 1 的扇形的弧长，即 $\frac{\pi}{3}\times 1=\frac{\pi}{3}$.



①



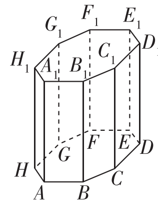
②

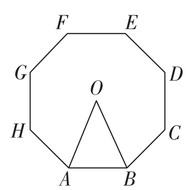
训练 50　8 单选 +3 多选 +3 填空

1. A 【解析】因为 $z=\frac{1+i}{1-2i}\cdot i^3=\frac{1+i}{1-2i}\cdot(-i)=\frac{1-i}{1-2i}=\frac{(1-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{3+i}{5}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$，所以 z 的虚部为 $\frac{1}{5}$. 故选 A.

2. C 【解析】当 $m=2$ 时，直线 $l_1:2x+2y-1=0$，直线 $l_2:3x+3y+1=0$，此时 $\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\neq\frac{-1}{1}$，所以 $l_1/\!/l_2$，充分性成立；当 $l_1/\!/l_2$ 时，可得 $\frac{m}{3}=\frac{2}{m+1}\neq\frac{-1}{1}(m+1\neq 0)$，得 $\begin{cases}m(m+1)=6,\\ m+1\neq -2,\\ m+1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $m=2$，必要性成立. 所以“$m=2$”是“直线 $l_1:mx+2y-1=0$ 与直线 $l_2:3x+(m+1)y+1=0$ 平行”的充要条件. 故选 C.

3. D 【解析】如图，由题意可知底面 $ABCDEFGH$ 是正八边形，$\angle AOB=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$，由余弦定理可得 $AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\angle AOB=(2-\sqrt{2})OA^2$，则 $OA^2=\frac{2+\sqrt{2}}{2}AB^2$. 因为底面 $ABCDEFGH$ 的面积约为 $3200(\sqrt{2}+1)$ 平方米，所以 $8\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2+\sqrt{2}}{2}AB^2=3200(\sqrt{2}+1)$，解得 $AB=40$，则该八棱柱的侧面积约是 $40\times 8\times 11.5=3680$(平方米). 故选 D.





4. C 【解析】当 $x>1$ 时，$f(x)=2x+\frac{2}{x-1}+3=2\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right)+5\geqslant 2\times 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}+5=9$，当且仅当 $x-1=\frac{1}{x-1}$，即 $x=2$ 时等号成立. 当 $x<1$ 时，$f(x)=x^2-(a^2-5a+4)x+3a$ 的图象所在抛物线的对称轴方程为 $x=\frac{a^2-5a+4}{2}$，则由题意得 $\frac{a^2-5a+4}{2}=0$，且 $f(0)=3a<9$，解得 $a=1$ 或 $a=4$(舍去). 故选 C.

5. D 【解析】由 $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，可得 $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，即 $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，因为点 E 在直线 BC 上，所以 $3+\lambda=1$，则 $\lambda=-2$，所以 $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$，则 $|\overrightarrow{AE}|^2=(3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})^2=9\overrightarrow{AB}^2+4\overrightarrow{AC}^2-12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9\times1+4\times9-12\times1\times3\times\frac{1}{4}=36$，所以 $|\overrightarrow{AE}|=6$. 故选 D.

6. C 【解析】由题得 $a=1,b=\sqrt{3},c=2$，因为 $BF_1\perp BF_2$，原点 O 是线段 F_1F_2 的中点，所以 $|OB|=\frac{1}{2}|F_1F_2|=c=2$. 因为双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的一条渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$，所以 $\tan\angle BOF_2=\sqrt{3}$，则 $\angle BOF_2=60^\circ$，故 $\triangle BOF_2$ 是等边三角形，则 $|BF_2|=2$. 由勾股定理得 $|BF_1|^2=|F_1F_2|^2-|BF_2|^2=4^2-2^2=12$，则 $|BF_1|=2\sqrt{3}$. 因为 $|AF_2|-|AF_1|=2a=2$，所以 $|AF_2|=2+|AF_1|$，故 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $|AB|+|BF_2|+|AF_2|=|AB|+|BF_2|+2+|AF_1|=2+|BF_1|+|BF_2|=2\sqrt{3}+4$. 故选 C.

7. B 【解析】因为 $S_n=2a_n-2^{n+1}$，所以 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2a_{n+1}-2^{n+2}-(2a_n-2^{n+1})$，整理得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=1$，又 $S_1=a_1=2a_1-2^2$，所以 $a_1=4$，所以 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是以 $\frac{a_1}{2}=2$ 为首项，1 为公差的等差数列，所以 $\frac{a_n}{2^n}=n+1$，故 $a_n=(n+1)2^n$，$S_n=2a_n-2^{n+1}=n\cdot2^{n+1}$. 因为 $(m^2-10m)a_n\leqslant(n-19)S_n$，所以 $(m^2-10m)(n+1)\cdot2^n\leqslant(n-19)n\cdot2^{n+1}$，即 $m^2-10m\leqslant\frac{2(n-19)n}{n+1}$. 可得 $\frac{2(n-19)n}{n+1}=\frac{2[(n+1)^2-21(n+1)+20]}{n+1}=2\left(n+1+\frac{20}{n+1}-21\right)$，令 $t=n+1$，由"对勾"函数的性质可知，$y=t+\frac{20}{t}$ 在 $(0,2\sqrt{5})$ 上单调递减，在 $(2\sqrt{5},+\infty)$ 上单调递增，又 $t\in\mathbf{N}^*$，且 $t\geqslant2$，所以当 $t=4$ 或 $t=5$ 时，$y_{\min}=t+\frac{20}{t}=9$，所以 $2\left(n+1+\frac{20}{n+1}-21\right)_{\min}=-24$，所以 $m^2-10m\leqslant-24$，解得 $4\leqslant m\leqslant6$. 所以实数 m 的最大值为 6. 故选 B.

8. D 【解析】由题得 p 的否定为"$\forall\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$(\cos\theta)^{\sin\theta}>(\sin\theta)^{\cos\theta}$". 该命题为真命题，证明如下. 因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $0<\sin\theta<\cos\theta<1$，要证 $(\cos\theta)^{\sin\theta}>(\sin\theta)^{\cos\theta}$，只需证 $\sin\theta\ln\cos\theta>\cos\theta\ln\sin\theta$，只需证 $\frac{\ln\cos\theta}{\cos\theta}>\frac{\ln\sin\theta}{\sin\theta}$. 令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(0<x<1)$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，易知当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，又 $0<\sin\theta<\cos\theta<1$，所以 $\frac{\ln\cos\theta}{\cos\theta}>\frac{\ln\sin\theta}{\sin\theta}$，则 p 的否定是真命题. 故选 D.

9. BCD 【解析】对于 A，在选择自由行的游客中随机抽取 1 人，抽到年龄小于 40 岁的游客的概率为 $\frac{38}{57}=\frac{2}{3}$，故 A 错误；对于 B，在选择自由行的游客中，年龄小于 40 岁和不小于 40 岁的人数之比为 38∶19＝2∶1，所以抽取的 6 人中，年龄小于 40 岁的人数为 $6\times\frac{2}{3}=4$，年龄不小于 40 岁的人数为 $6\times\frac{1}{3}=2$，所以所选 2 人中至少有 1 人年龄不小于 40 岁的概率为 $1-\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{3}{5}$，故 B 正确；对于 C，因为 $\chi^2=\frac{100\times(38\times23-19\times20)^2}{57\times43\times58\times42}\approx4.087<6.635=x_{0.01}$，所以根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，因此可以认为 H_0 成立，即认为旅行方式与年龄没有关联，故 C 正确；对于 D，因为 $\chi^2\approx4.087>3.841=x_{0.05}$，所以根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为旅行方式与年龄有关联，该推断犯错误的概率不超过 0.05，故 D 正确. 故选 BCD.

10. ACD 【解析】由题知 $m>0,n>0,mn=2$，则 $m+n\geqslant2\sqrt{mn}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $m=n=\sqrt{2}$ 时，等号成立，所以 $m+n$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$，故 A 正确；$m^2+n^2\geqslant2mn=4$，当且仅当 $m=n=\sqrt{2}$ 时，等号成立，所以 m^2+n^2 的最小值为 4，故 B 错误；$(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2=m+n+2\sqrt{mn}=m+n+2\sqrt{2}\geqslant4\sqrt{2}$，当且仅当 $m=n=\sqrt{2}$ 时，等号成立，所以 $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ 的最小值为 $2^{\frac{5}{4}}$，故 C 正确；$\frac{m}{4-m}+\frac{n}{1-n}=-1+\frac{4}{4-m}+\frac{mn}{m-mn}=-1+\frac{4}{4-m}+\frac{2}{m-2}$，因为 $\left(\frac{4}{4-m}+\frac{2}{m-2}\right)(4-m+m-2)\times\frac{1}{2}=\left[6+\frac{4(m-2)}{4-m}+\frac{2(4-m)}{m-2}\right]\times\frac{1}{2}\geqslant\left[6+2\sqrt{\frac{4(m-2)}{4-m}\cdot\frac{2(4-m)}{m-2}}\right]\times\frac{1}{2}=3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $\frac{4(m-2)}{4-m}=\frac{2(4-m)}{m-2}$，即 $m=2\sqrt{2}$ 时，等号成立，所以 $\frac{m}{4-m}+\frac{n}{1-n}$ 的最小值为 $2+2\sqrt{2}$，故 D 正确. 故选 ACD.

11. ACD 【解析】对于 A，当 $\lambda=\mu=1$ 时，点 P 与点 C_1 重合，由正方体的性质可得 $BC_1\perp A_1D$，所以 $BP\perp A_1D$，故 A 正确；对于 B，当 $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$ 时，点 P 为 B_1C 的中点，易知 $B_1C/\!/$平面 A_1BD，所以点 P 到平面 A_1BD 的距离等于点 C 到平面 A_1BD 的距离，设为 d，由 $V_{A_1\text{-}BCD}=V_{C\text{-}A_1BD}$，得 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2\times d$，解得 $d=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 B 错误；对于 C，当 $\lambda+\mu=1$ 时，P,C,B_1 三点共线，因为平面 $B_1CD_1/\!/$平面 A_1BD，$D_1P\subset$平面 B_1CD_1，所以 $D_1P/\!/$平面 A_1BD，故 C 正确；对于 D，取 BB_1,BC 的中点，分别记为 M,N，连接 MN，则点 P 在线段 MN 上，易知 $MN/\!/$平面 A_1BD，点 P 到平面 A_1BD 的距离为定值，且是点 C 到平面 A_1BD 的距离的一半，即为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$，所以 $V_{A_1\text{-}PBD}=V_{P\text{-}A_1BD}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2\times\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{12}$，故 D 正确. 故选 ACD.

12. -1 【解析】由题意得 $f'(x)=(x+1)e^x$，过点 $(2,0)$ 作 $f(x)=xe^x$ 的图象的两条切线，设切点坐标为 $(x_0,x_0e^{x_0})$，则 $(x_0+1)e^{x_0}=\frac{x_0e^{x_0}}{x_0-2}$，即 $(x_0^2-2x_0-2)e^{x_0}=0$，因为 $e^{x_0}>0$，所以 $x_0^2-2x_0-2=0$，$\Delta=12>0$，由题意可知 x_1,x_2 为 $x_0^2-2x_0-2=0$ 的两个解，则 $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=-2$，故 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-1$.

13. $\frac{\sqrt{2}}{2}+1$ 【解析】$(a-c)^2+(b-d)^2$ 可看作 (a,b) 与 (c,d) 两点间距离的平方. 由 $a^2-ab+1=0$，得 $b=a+\frac{1}{a}$，而 $c^2+d^2=1$ 表示以 $(0,0)$ 为圆心，1 为半径的圆，(c,d) 为圆上一点，则 (a,b) 与圆心 $(0,0)$ 的距离为 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}=\sqrt{2a^2+\frac{1}{a^2}+2}\geqslant\sqrt{2\sqrt{2a^2\cdot\frac{1}{a^2}}+2}=$

$\sqrt{2\sqrt{2}+2}$,当且仅当 $2a^2=\frac{1}{a^2}$,即 $a=\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ 时等号成立,此时(a,b)与圆心$(0,0)$的距离最小,当点(c,d)为点(a,b)与圆心$(0,0)$的连线与圆的交点时,(a,b)与(c,d)两点间距离的平方最小,故此时 $ab=a^2+1=\frac{\sqrt{2}}{2}+1$.

14. $[6,4\sqrt{3})$ 【解析】因为 $a\cos(B-C)+a\cos A=2\sqrt{3}c\sin B\cos A$,所以 $a\cos B\cos C+a\sin B\sin C-a(\cos B\cos C-\sin B\sin C)=2\sqrt{3}c\sin B\cos A$,即 $a\sin B\sin C=\sqrt{3}c\sin B\cos A$,由正弦定理得 $\sin A\sin B\sin C=\sqrt{3}\sin C\sin B\cos A$,显然 $\sin C>0$,$\sin B>0$,所以 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$,所以 $\tan A=\sqrt{3}$,因为 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

因为$\triangle ABC$外接圆的半径为$\sqrt{3}$,所以$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2\sqrt{3}$,所以 $a=3$,$b=2\sqrt{3}\sin B$,所以$\frac{b^2+a^2}{b}=b+\frac{a^2}{b}=2\sqrt{3}\sin B+\frac{3\sqrt{3}}{2\sin B}=2\sqrt{3}\left(\sin B+\frac{3}{4\sin B}\right)$.因为$\triangle ABC$为锐角三角形,所以$\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\0<\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 所以$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$,所以 $\sin B\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.令 $f(x)=x+\frac{3}{4x}$,$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,根据"对勾"函数的性质可知函数 $f(x)=x+\frac{3}{4x}$在$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$上单调递增,且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$,$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}$,$f(1)=\frac{7}{4}$,所以 $f(x)\in[\sqrt{3},2)$,即 $\sin B+\frac{3}{4\sin B}\in[\sqrt{3},2)$,所以 $2\sqrt{3}\left(\sin B+\frac{3}{4\sin B}\right)\in[6,4\sqrt{3})$,即$\frac{b^2+a^2}{b}$的取值范围为$[6,4\sqrt{3})$.

训练 51 8 单选+3 多选+3 填空

1. D 【解析】∵集合 $M\subseteq\{1,2,3,4\}$,且 $M\cap\{1,2\}=\{1,2\}$,∴满足条件的集合 M 为$\{1,2\}$,$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4\}$,$\{1,2,3,4\}$,共有 4 个.故选 D.

2. B 【解析】因为 $z=i^{2023}(1+2i)=-i(1+2i)=2-i$,所以$\overline{z}=2+i$.故选 B.

3. A 【解析】∵定义在 **R** 上的偶函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,且 $f(-2)=0$,∴$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,且 $f(2)=0$,∴当 $x<-2$ 或 $x>2$ 时,$f(x)>0$;当$-2<x<2$ 时,$f(x)<0$.若 $xf(x+2)\geqslant0$,则 $\begin{cases}x\geqslant0,\\f(x+2)\geqslant0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\leqslant0,\\f(x+2)\leqslant0,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}x\geqslant0,\\x+2\leqslant-2\text{ 或 }x+2\geqslant2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\leqslant0,\\-2\leqslant x+2\leqslant2,\end{cases}$ ∴$x\geqslant0$ 或 $-4\leqslant x\leqslant0$,即 $x\geqslant-4$,则不等式 $xf(x+2)\geqslant0$ 的解集是$[-4,+\infty)$.故选 A.

4. D 【解析】$(x+y)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^rx^{6-r}y^r$,则$\left(1-\frac{2x}{y}\right)(x+y)^6$ 的展开式中含 x^4y^2 的项为 $1\times C_6^2x^4y^2-\frac{2x}{y}\times C_6^3x^3y^3=-25x^4y^2$,所以展开式中 x^4y^2 的系数为-25.故选 D.

5. D 【解析】由题得 $P\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$,$A(-a,0)$,$B(0,b)$,则 $k_{AB}=\frac{b}{a}$,$k_{OP}=\frac{b^2}{ac}$.因为 $AB/\!/OP$,所以 $k_{AB}=k_{OP}$,则$\frac{b}{a}=\frac{b^2}{ac}$,可得 $b=c$,则 $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2}c$,所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.故选 D.

6. A 【解析】由 $\cos nx=T_n(\cos x)$,得 $\cos90^\circ=\cos(5\times18^\circ)=T_5(\cos18^\circ)=16\cos^5 18^\circ-20\cos^3 18^\circ+5\cos18^\circ$,即 $16\cos^5 18^\circ-20\cos^3 18^\circ+5\cos18^\circ=0$,即 $16\cos^4 18^\circ-20\cos^2 18^\circ+5=0$,令 $t=\cos^2 18^\circ$,则 $16t^2-20t+5=0$,解得 $t=\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$,因为 $18^\circ<30^\circ$,所以 $\cos18^\circ>\frac{\sqrt{3}}{2}$,则 $t=\cos^2 18^\circ>\frac{3}{4}$,所以 $t=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$.故选 A.

7. A 【解析】以 A 为原点,AC 所在的直线为 x 轴,过点 A 且垂直于 AC 的直线为 y 轴,建立平面直角坐标系,由题得 $A(0,0)$,$C(4,0)$,$B(1,\sqrt{3})$,则 $M\left(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$N(2,0)$,所以 $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{BN}=(1,-\sqrt{3})$,则$|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{7}$,$|\overrightarrow{BN}|=2$,$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=1$,因为$\angle MPN$ 即为向量 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{BN}$ 的夹角,所以 $\cos\angle MPN=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BN}|}=\frac{1}{\sqrt{7}\times2}=\frac{\sqrt{7}}{14}$.故选 A.

8. C 【解析】令 $f(x)=\ln(1+x)-x$,则 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}$,可得当 $x>0$ 时,$f'(x)<0$,所以函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,则 $f(x)<f(0)=0(x>0)$,即 $\ln(1+x)<x(x>0)$.因为 $a_n>0$,所以 $a_n=2a_{n+1}+a_{n+1}\cdot\ln(a_n+1)<2a_{n+1}+a_{n+1}\cdot a_n$,即 $a_n<a_{n+1}(2+a_n)$,所以$\frac{a_n}{2+a_n}<a_{n+1}$,所以$\frac{2+a_n}{a_n}>\frac{1}{a_{n+1}}$,即$\frac{2}{a_n}+1>\frac{1}{a_{n+1}}$,则 $2\left(\frac{1}{a_n}+1\right)>\frac{1}{a_{n+1}}+1$,则当 $n\geqslant2$ 时,$\frac{1}{a_n}+1<2^{n-1}\left(\frac{1}{a_1}+1\right)=2^n$,所以当 $n\geqslant2$ 时,$a_n>\frac{1}{2^n-1}$,则 $a_{10}>\frac{1}{2^{10}-1}=\frac{1}{1023}$.由 $a_n>0$,得 $\ln(a_n+1)>0$,则 $a_n=2a_{n+1}+a_{n+1}\ln(a_n+1)>2a_{n+1}$,即 $a_{n+1}<\frac{1}{2}a_n$,则当 $n\geqslant2$ 时,$a_n<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}a_1=\frac{1}{2^{n-1}}$,则 $a_{10}<\frac{1}{512}$.综上可得$\frac{1}{1023}<a_{10}<\frac{1}{512}$,即 a_{10} 的取值范围为$\left(\frac{1}{1023},\frac{1}{512}\right)$,故选 C.

9. ABC 【解析】对于 A,令$\begin{cases}C_8^r3^{8-r}>C_8^{r+1}3^{7-r},\\C_8^r3^{8-r}>C_8^{r-1}3^{9-r},\end{cases}$解得$\frac{5}{4}<r<\frac{9}{4}$,所以 $r=2$,则二项展开式中系数最大的项为 $C_8^2\times3^6x^{\frac{14}{3}}$,故 A 正确;对于 B,由题得 $C_9^1\times3^8x^{\frac{22}{3}}\leqslant C_9^2\times3^7x^{\frac{17}{3}}$,整理可得 $x^{\frac{5}{3}}\leqslant\frac{4}{3}$,当 $0<x\leqslant1$ 时,不等式恒成立,当 $x>1$ 时,解得 $1<x\leqslant\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{5}}$,所以 $0<x\leqslant\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{5}}$,故 B 正确;对于 C,令 $10-\frac{5}{3}r=0$,解得 $r=6$,所以二项展开式中的常数项为 $C_{10}^6\times3^{10-6}=C_{10}^4\times3^4$,故 C 正确;对于 D,令 $27-\frac{5r}{3}<0$,解得 $r>\frac{81}{5}$,所以 r 可取 $17,18,\cdots,27$,共 11 项,故 D 错误.故选 ABC.

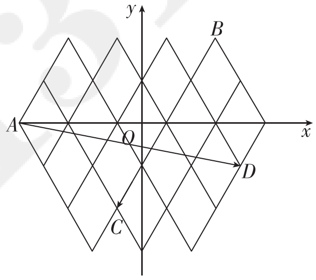
10. BCD 【解析】对于 A,因为 $a>0$,$b>0$,$a+2b=1$,所以$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+2b)=4+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant4+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=8$,当且仅当$\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$,即 $a=\frac{1}{2}$,$b=\frac{1}{4}$时取等号,故 A 错误;对于 B,由 $1=a+2b\geqslant2\sqrt{2ab}$,得 $ab\leqslant\frac{1}{8}$,当且仅当 $a=2b$,即 $a=\frac{1}{2}$,$b=\frac{1}{4}$时取等号,故 B 正确;对于 C,$a^2+b^2=(1-2b)^2+b^2=5b^2-4b+1=5\left(b-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}$,故当 $b=$

$\frac{2}{5}$时，a^2+b^2 取得最小值$\frac{1}{5}$，此时 $a=\frac{1}{5}$，故 C 正确；对于 D，$2^a+4^b\geqslant 2\sqrt{2^a\cdot 4^b}=2\sqrt{2^{a+2b}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $2^a=4^b$，即 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$时取等号，故 D 正确．故选 BCD．

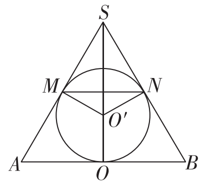
11. ACD 【解析】由题意可知，所得到的旋转体是一个圆台．因为 $AB=3$，$CD=1$，所以圆台的上底面的半径 $r_1=\frac{1}{2}$，下底面的半径 $r_2=\frac{3}{2}$，又 $BC=3$，所以该圆台的侧面积 $S=\pi(r_1+r_2)\cdot BC=\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\times 3=6\pi$，所以 A 正确．过点 C，D 分别作 $CG\perp AB$ 于点 G，$DH\perp AB$ 于点 H，则 $AH=HG=GB=1$，所以 $DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$，故该圆台的体积 $V=\frac{1}{3}\pi(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)\cdot DH=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{9}{4}\right)\times 2\sqrt{2}=\frac{13\sqrt{2}\pi}{6}$，所以 B 错误．易知圆台的上、下底面平行，所以直线 AE 与圆台的上底面所成的角等于直线 AE 与圆台的下底面所成的角，过点 E 作 $EM\perp AB$ 于点 M，易知$\angle MAE$ 为直线 AE 与圆台的下底面所成的角，又 $AM=AB-MB=AB-\frac{1}{2}BG=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，$EM=\frac{1}{2}CG=\frac{1}{2}DH=\sqrt{2}$，所以 $\tan\angle MAE=\frac{EM}{AM}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，所以 C 正确．设该圆台的外接球的半径为 R，球心为 O，$OO_2=m(m>0)$，当点 O 在线段 O_1O_2 上时，$0<m\leqslant 2\sqrt{2}$，$OO_1=2\sqrt{2}-m$，由 $R=OB=OC$，得 $\sqrt{O_2B^2+OO_2^2}=\sqrt{O_1C^2+OO_1^2}$，即$\sqrt{\frac{9}{4}+m^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+(2\sqrt{2}-m)^2}$，解得 $m=\frac{3\sqrt{2}}{4}$；当点 O 在线段 O_1O_2 的延长线上时，$OO_1=2\sqrt{2}+m$，由 $R=OB=OC$，得 $\sqrt{O_2B^2+OO_2^2}=\sqrt{O_1C^2+OO_1^2}$，即$\sqrt{\frac{9}{4}+m^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+(2\sqrt{2}+m)^2}$，整理得 $4\sqrt{2}m=-6$，此时 m 无符合题意的解．所以 $m=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，$R^2=\frac{9}{4}+\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{27}{8}$，则该旋转体的外接球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\times\frac{27}{8}=\frac{27\pi}{2}$，所以 D 正确．故选 ACD．

12. -1 【解析】由题得 $f'(x)=3ax^2+2bx$，$f(1)=3$，$f'(1)=7$，则 $a+b=3$，$3a+2b=7$，解得 $a=1$，$b=2$，所以 $a-b=-1$．

13. -6 【解析】以该图形的对称轴为 y 轴，过点 A 作对称轴的垂线为 x 轴，建立平面直角坐标系，如图所示，由题知 $A\left(-\frac{5}{2},0\right)$，$B\left(\frac{3}{2},\sqrt{3}\right)$，$C\left(-\frac{1}{2},-\sqrt{3}\right)$，$D\left(2,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{9}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,-2\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=-9+3=-6$．



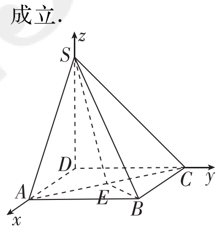
14. $\frac{5}{32}$ 【解析】作出圆锥的轴截面，如图所示，M，N 为小球的轴截面与圆锥轴截面的切点，设小球 O'的半径为 r．由题知$\triangle SAB$ 是边长为 2 的正三角形，则 $OB=1$，$SO=\sqrt{3}$，所以小球 O'的半径 $r=O'O=\frac{\sqrt{3}}{3}$．又$\angle SOA=\angle SMO'=\frac{\pi}{2}$，所以$\triangle SMO'\backsim\triangle SOA$，则$\frac{SM}{SO}=\frac{O'M}{AO}$，解得 $SM=1$，故 M 是 SA 的中点．同理可得 N 是 SB 的中点．所以 $MN=\frac{1}{2}AB=1$，故 O'到 MN 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{6}$，则较小部分球缺的高 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，故较小部分球缺的体积 $V=\frac{\pi}{3}(3r-h)\cdot h^2=\frac{\pi}{3}\times\left(3\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{5\sqrt{3}\pi}{216}$，则较小部分球缺的体积与球 O'的体积的比值为$\frac{\frac{5\sqrt{3}\pi}{216}}{\frac{4\pi}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3}=\frac{5}{32}$．



训练 52 数列＋立体几何＋概率统计＋函数与导数

1. **证明**：(1)因为 $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$，所以 $a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$，因为 $a_2-2a_1=3\neq 0$，所以$\frac{a_{n+2}-2a_{n+1}}{a_{n+1}-2a_n}=3$，所以数列$\{a_{n+1}-2a_n\}$是首项为 3，公比为 3 的等比数列．
(2)由(1)知，$a_{n+1}-2a_n=3^n$，所以 $a_{n+1}-3^{n+1}=2(a_n-3^n)$，因为 $a_1-3^1=-2\neq 0$，所以数列$\{a_n-3^n\}$是首项为-2，公比为 2 的等比数列，所以 $a_n-3^n=-2^n$，所以 $a_n=3^n-2^n$．令 $b_n=3^n$，$c_n=-2^n$，则$\frac{b_{n+1}}{b_n}=3$，$\frac{c_{n+1}}{c_n}=2$，满足题意，所以存在两个等比数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$，使得 $a_n=b_n+c_n$ 成立．

2. **解**：(1)证明：取 AC 的中点 E，连接 SE，BE，因为 $AB=BC$，所以 $BE\perp AC$．在$\triangle SCB$ 和$\triangle SAB$ 中，$\angle SAB=\angle SCB=90°$，$AB=CB$，$SB=SB$，所以$\triangle SCB\cong\triangle SAB$，所以 $SA=SC$，所以 $SE\perp AC$，又 $BE\cap SE=E$，BE，$SE\subset$平面 SBE，所以 $AC\perp$平面 SBE，因为 $SB\subset$平面 SBE，所以 $AC\perp SB$．



(2)过 S 作 $SD\perp$平面 ABC，垂足为 D，连接 AD，CD，则 $SD\perp AB$，因为 $AB\perp SA$，$SD\cap SA=S$，所以 $AB\perp$平面 SAD，因为 $AD\subset$平面 SAD，所以 $AB\perp AD$．同理，$BC\perp CD$，所以四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形．以 D 为原点，DA，DC，DS 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则易知 $A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$S(0,0,2)$，所以 $\overrightarrow{SC}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$．设平面 SAC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{SC}=2y_1-2z_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AC}=-2x_1+2y_1=0,\end{cases}$ 取 $x_1=1$，则 $y_1=1$，$z_1=1$，所以 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,1)$．同理可得平面 SBC 的一个法向量为$\boldsymbol{n}_2=(0,1,1)$．设平面 SAC 与平面 SBC 的夹角为 θ，所以 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以平面 SAC 与平面 SBC 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$．

3. **解**：(1)由题意可知，甲、乙得分相同有如下情况：①甲得 0 分，乙得 0 分，其概率为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$；
②甲得 1 分，乙得 1 分，其概率为$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$；
③甲得 2 分，乙得 2 分，其概率为$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{27}$．
所以甲、乙得分相同的概率为$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}=\frac{7}{27}$．
(2)由题意知，X 的可能取值为 0，1，2，3，4．
则 $P(X=0)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，
$P(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，
$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+$

$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{13}{72}$,

$P(X=3)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{7}{144}$,

$P(X=4)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{1}{48}$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{72}$	$\frac{7}{144}$	$\frac{1}{48}$

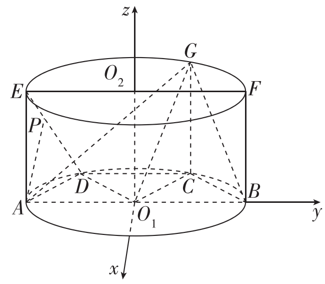
$E(X)=\frac{1}{4}+\frac{13}{36}+\frac{21}{144}+\frac{1}{12}=\frac{121}{144}$.

4. **解**:(1)由题意得,函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,
$f'(x)=2e^{2x}+(1-2a)e^{x}-a=(2e^{x}+1)(e^{x}-a)$,
因为 $2e^{x}+1>0$,所以当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)>0$ 恒成立,此时函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,
当 $a>0$ 时,由 $f'(x)>0$,解得 $x>\ln a$,由 $f'(x)<0$,解得 $x<\ln a$,
所以函数 $f(x)$在$(\ln a,+\infty)$上单调递增,在$(-\infty,\ln a)$上单调递减.
综上,当 $a\leqslant 0$ 时,函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;
当 $a>0$ 时,函数 $f(x)$在$(\ln a,+\infty)$上单调递增,在$(-\infty,\ln a)$上单调递减.
(2)当 $a=1$ 时,由(1)得 $2f(x)-f'(x)=-e^{x}-2x+1$,
因为 $x>0$,所以不等式 $2f(x)-f'(x)\leqslant -x^{2}-(m+2)x$ 可化为 $m\leqslant\frac{e^{x}-x^{2}-1}{x}$.
设 $g(x)=\frac{e^{x}-x^{2}-1}{x}$,则 $g'(x)=\frac{(x-1)(e^{x}-x-1)}{x^{2}}$.
设 $h(x)=e^{x}-x-1$,则 $h'(x)=e^{x}-1$,
因为 $x>0$,所以 $h'(x)>0$,则 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,
所以 $h(x)>h(0)=0$,即 $e^{x}-x-1>0$.
可得 $g(x)$在$(0,1]$上单调递减,在$[1,+\infty)$上单调递增,
所以 $g(x)\geqslant g(1)=e-2$.
因此 $m\leqslant e-2$,即实数 m 的取值范围为$(-\infty,e-2]$.

训练 53 三角+立体几何+概率统计+圆锥曲线

1. **解**:(1)因为 $b\cos C+\sqrt{3}b\sin C=a+c$,所以 $b\cos C+\sqrt{3}b\sin C-a-c=0$,所以 $\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C-\sin A-\sin C=0$,因为 $A+B+C=\pi$,所以 $\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C-\sin(B+C)-\sin C=0$,所以$\sqrt{3}\sin B\sin C-\cos B\sin C-\sin C=0$,因为 $C\in(0,\pi)$,所以 $\sin C\neq 0$,所以 $\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$,因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$. 设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R,则 $2R=\frac{b}{\sin B}=2$,所以 $R=1$.
(2)因为 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=6$,$B=\frac{\pi}{3}$,所以 $ac=12$,又因为 $b^{2}=a^{2}+c^{2}-2ac\cos B$,且 $a+c=4\sqrt{3}$,所以可得 $b=2\sqrt{3}$. 设$\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r,$\triangle ABC$ 的面积为 S,则 $S=\frac{1}{2}(a+b+c)r=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B=3\sqrt{3}$,解得 $r=1$.

2. **解**:(1)证明:在圆柱 O_1O_2 中,易知 $AE/\!/CG$,因为 $AE\not\subset$平面 O_1CG,$CG\subset$平面 O_1CG,所以 $AE/\!/$平面 O_1CG.
连接 DO_1,因为等腰梯形 $ABCD$ 为底面圆 O_1 的内接四边形,O_1 在 AB 上,$AD=DC=BC=1$,
所以$\angle AO_1D=\angle CO_1D=\angle BO_1C=\frac{\pi}{3}$,则$\triangle AO_1D$ 为正三角形,故$\angle O_1AD=\angle CO_1B=\frac{\pi}{3}$,则 $AD/\!/O_1C$.
因为 $AD\not\subset$平面 O_1CG,$O_1C\subset$平面 O_1CG,所以 $AD/\!/$平面 O_1CG. 又 $AE\cap AD=A$,$AE,AD\subset$平面 ADE,故平面 $ADE/\!/$平面 O_1CG.
(2)连接 O_1O_2,以 O_1 为坐标原点,以过点 O_1 且垂直于平面 $ABFE$ 的直线为 x 轴,O_1B,O_1O_2所在直线分别为 y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



由(1)可知 $AO_1=1$,且 $AD=DC=BC=1$,$CG=1$,故 $A(0,-1,0)$,$B(0,1,0)$,$G\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$,$D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$,$E(0,-1,1)$,则 $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{AG}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},1\right)$. 设平面 ABG 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AG}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y=0,\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y+z=0,\end{cases}$ 令 $x=2\sqrt{3}$,则 $\boldsymbol{n}=(2\sqrt{3},0,3)$. 由 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DE}$,$\lambda\in[0,1]$,$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1\right)$,可得 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2},\lambda\right)$,所以 $\overrightarrow{AP}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2},\lambda\right)$.
设直线 AP 与平面 ABG 所成的角为 θ,$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AP}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AP}|}\right|=\frac{|3\lambda-3+0+3\lambda|}{\sqrt{12+0+9}\cdot\sqrt{2\lambda^{2}-2\lambda+1}}=\frac{\sqrt{105}}{35}$,即 $9\lambda^{2}-9\lambda+2=0$,解得 $\lambda=\frac{1}{3}$或 $\lambda=\frac{2}{3}$,符合 $\lambda\in[0,1]$,故 $\lambda=\frac{1}{3}$或 $\lambda=\frac{2}{3}$.

3. **解**:(1)记“甲同学复评晋级”为事件 X,“乙同学复评晋级”为事件 Y,“丙同学复评晋级”为事件 Z,则 $P(X)=\frac{1}{4}$,$P(Y)=P(Z)=\frac{1}{5}$,且 X,Y,Z 相互独立. 根据题意,H 的所有可能取值为 0,1,2,3,则 $P(H=0)=P(X\overline{Y}\,\overline{Z})=P(X)P(\overline{Y})P(\overline{Z})=\frac{1}{4}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{2}=\frac{16}{100}=\frac{4}{25}$;$P(H=1)=P(\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}+XY\overline{Z}+X\overline{Y}Z)=P(\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z})+P(XY\overline{Z})+P(X\overline{Y}Z)=\frac{3}{4}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{2}+\frac{1}{4}\times 2\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{56}{100}=\frac{14}{25}$;$P(H=2)=P(\overline{X}Y\overline{Z}+\overline{X}\,\overline{Y}Z+XYZ)=P(\overline{X}Y\overline{Z})+P(\overline{X}\,\overline{Y}Z)+P(XYZ)=\frac{3}{4}\times 2\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$;$P(H=3)=P(\overline{X}YZ)=P(\overline{X})P(Y)P(Z)=\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{2}=\frac{3}{100}$. 所以 H 的分布列为

H	0	1	2	3
P	$\frac{4}{25}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{100}$

所以 $E(H)=0\times\frac{4}{25}+1\times\frac{14}{25}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{3}{100}=\frac{23}{20}$.
(2)记“任选的学生初评是 A 等级”为事件 M_1,“任选的学生初评是 B 等级”为事件 M_2,“任选的学生初评是 C 等级”为事件 M_3,“任选的学生初评是 D 等级”为事件 M_4. 显然 M_1,M_2,M_3,M_4 两两互斥,且 $M_1+M_2+M_3+M_4=\Omega$. 由题图可知 $P(M_1)=0.2$,$P(M_2)=0.6$,$P(M_3)=0.15$,$P(M_4)=0.05$. 记“学生复评晋级”为事件 N,由全概率公式得 $P(N)=$

$P(M_1)P(N|M_1)+P(M_2)P(N|M_2)+P(M_3)P(N|M_3)+P(M_4)P(N|M_4)=0+0.6\times\frac{1}{4}+0.15\times\frac{1}{5}+0.05\times\frac{1}{6}=\frac{113}{600}$,由条件概率公式得 $P(M_3|N)=\frac{P(M_3N)}{P(N)}=\frac{\frac{3}{100}}{\frac{113}{600}}=\frac{18}{113}$.

所以在已知该学生是复评晋级的条件下,该学生初评是 C 等级的概率为$\frac{18}{113}$.

4. 解:(1)证明:设直线 BC 的方程为 $x=my+n(m,n\in\mathbf{R})$,$B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,将点 A 的坐标代入抛物线方程得 $p=1$,∴抛物线 E 的方程为 $y^2=2x$. 由$\begin{cases}x=my+n,\\y^2=2x,\end{cases}$可得 $y^2-2my-2n=0$,则有$\begin{cases}\Delta_1>0,\\y_1+y_2=2m,\\y_1y_2=-2n,\end{cases}$∵$\angle BOC=90°$,∴$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=x_1x_2+y_1y_2=0$,即$(my_1+n)(my_2+n)+y_1y_2=0$,整理得$(m^2+1)y_1y_2+mn(y_1+y_2)+n^2=0$,即$-2m^2n-2n+2m^2n+n^2=0$,即 $n^2-2n=0$,解得 $n=0$ 或 $n=2$. 若 $n=0$,则直线 BC 的方程为$x=my$,直线 BC 恒过定点$(0,0)$,不符合题意,舍去;若 $n=2$,则直线 BC 的方程为 $x=my+2$,直线 BC 恒过定点$(2,0)$,得证.

(2)设直线 BC 的方程为 $x=m_1y-\frac{1}{2}$,$B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,由$\begin{cases}x=m_1y-\frac{1}{2},\\y^2=2x,\end{cases}$得 $y^2-2m_1y+1=0$,则有$\begin{cases}\Delta_2>0,\\y_1+y_2=2m_1,\\y_1y_2=1,\end{cases}$

∵$\overrightarrow{FB}=\left(x_1-\frac{1}{2},y_1\right)$,$\overrightarrow{FC}=\left(x_2-\frac{1}{2},y_2\right)$,$|BF|=x_1+\frac{1}{2}$,$|CF|=x_2+\frac{1}{2}$,且易知 $\cos\angle BFC=\frac{7}{25}$,∴$\cos\langle\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FC}\rangle=\frac{\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}}{|\overrightarrow{FB}||\overrightarrow{FC}|}=\frac{\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\left(x_2-\frac{1}{2}\right)+y_1y_2}{\left(x_1+\frac{1}{2}\right)\left(x_2+\frac{1}{2}\right)}=\frac{(m_1y_1-1)(m_1y_2-1)+y_1y_2}{(m_1y_1)(m_1y_2)}=\frac{(m_1^2+1)y_1y_2-m_1(y_1+y_2)+1}{m_1^2y_1y_2}=\frac{m_1^2+1-2m_1^2+1}{m_1^2}=\frac{2-m_1^2}{m_1^2}=\frac{7}{25}$,可得 $m_1=\pm\frac{5}{4}$. ∵直线 BC 过点 Q,点 B,C 在 x 轴下方,∴$m_1=-\frac{5}{4}$,将其代入 $y^2-2m_1y+1=0$,解得 $y_1=-\frac{1}{2}$,$y_2=-2$,∴$B\left(\frac{1}{8},-\frac{1}{2}\right)$,∵$k_{AF}=\frac{4}{3}=k_{BF}$,∴$A$,$F$,$B$ 三点共线,∴$\frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle BCF}}=\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}}=4$.

训练 54　三角+数列+圆锥曲线+函数与导数

1. 解:(1)因为 $\sin\frac{A+C}{2}=\sin\frac{\pi-B}{2}=\cos\frac{B}{2}$,

所以 $\cos B+\cos\frac{B}{2}=0$,即 $2\cos^2\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}-1=0$,

解得 $\cos\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$或 $\cos\frac{B}{2}=-1$.

因为$0<B<\pi$,所以$0<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{2}$,则 $\cos\frac{B}{2}>0$,故 $\cos\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$,

则$\frac{B}{2}=\frac{\pi}{3}$,所以 $B=\frac{2\pi}{3}$.

(2)令 $c=5m(m>0)$,则 $a=3m$,

由三角形面积公式,得$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}b\times\frac{15\sqrt{3}}{14}$,

所以 $b=7m^2$,

由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,即$(7m^2)^2=(3m)^2+(5m)^2-2\cdot(3m)\cdot(5m)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$,

则 $49m^4=49m^2$,可得 $m=1$,

从而 $a=3$,$b=7$,$c=5$,

故$\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=15$.

2. 解:(1)由 $3a_n-2=S_n$,可得 $3a_{n-1}-2=S_{n-1}(n\geqslant2)$,

两式相减得 $3a_n-3a_{n-1}=S_n-S_{n-1}=a_n(n\geqslant2)$,则 $a_n=\frac{3}{2}a_{n-1}(n\geqslant2)$,

因为数列$\{a_n\}$中的各项都不为 0,

所以数列$\{a_n\}$是以$\frac{3}{2}$为公比的等比数列.

当 $n=1$ 时,$3a_1-2=S_1=a_1$,解得 $a_1=1$,

所以 $a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

因为 $b_1=-1$,$b_{n+1}=b_n+n$,所以 $b_{n+1}-b_n=n$,所以 $b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_2-b_1)+b_1=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+(-1)=\frac{n(n-1)}{2}-1=\frac{(n+1)(n-2)}{2}$.

(2)由(1)得 $c_n=\frac{2a_nb_n}{n+1}=(n-2)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$,

所以 $T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=(-1)\times\left(\frac{3}{2}\right)^0+0\times\left(\frac{3}{2}\right)^1+\cdots+(n-2)\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$,

$\frac{3}{2}T_n=(-1)\times\left(\frac{3}{2}\right)^1+0\times\left(\frac{3}{2}\right)^2+\cdots+(n-2)\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$,

两式相减得$-\frac{1}{2}T_n=-1+\frac{\frac{3}{2}\times\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{3}{2}}-(n-2)\times\left(\frac{3}{2}\right)^n=-4+\left(6-\frac{3}{2}n\right)\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$,

所以 $T_n=8+3(n-4)\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

3. 解:(1)由题意知 $a=b=\sqrt{2}$,所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm x$.

(2)双曲线 C:$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点坐标为$(2,0)$.

由题意知,直线 AB 的斜率不为 0,设直线 AB 的方程为 $x=ty+2$,代入$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ 中,

整理可得$(t^2-1)y^2+4ty+2=0(t^2\neq1)$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=\frac{-4t}{t^2-1}$,$y_1y_2=\frac{2}{t^2-1}$,

则 $x_1+x_2=t(y_1+y_2)+4=\frac{-4t^2}{t^2-1}+4=\frac{-4}{t^2-1}$,

所以线段 AB 的中点 S 的坐标为$\left(\frac{-2}{t^2-1},\frac{-2t}{t^2-1}\right)$,

直线 ST 的方程为 $y+\frac{2t}{t^2-1}=-t\left(x+\frac{2}{t^2-1}\right)(*)$.

(i)当 $t=0$ 时,点 S 恰好为焦点 F,此时存在点 $T\left(2+\frac{4\sqrt{5}}{3},0\right)$或 $T\left(2-\frac{4\sqrt{5}}{3},0\right)$,使得 $\overrightarrow{TS}\cdot\overrightarrow{TB}=\overrightarrow{TS}^2=\frac{80}{9}$.

此时直线 AB 的方程为 $x=2$.

(ii)当 $t\neq0$ 时,在$(*)$式中令 $y=0$,可得 $x=\frac{-4}{t^2-1}$,则点 T 的坐标为$\left(\frac{-4}{t^2-1},0\right)$,$\overrightarrow{TS}=\left(\frac{2}{t^2-1},\frac{-2t}{t^2-1}\right)$.

因为 $ST\perp AB$,所以 $\overrightarrow{TS}\cdot\overrightarrow{TB}=\overrightarrow{TS}^2$.

由 $\overrightarrow{TS}\cdot\overrightarrow{TB}=\frac{80}{9}$,得$|\overrightarrow{TS}|^2=\frac{80}{9}$,可得$|\overrightarrow{TS}|^2=\left(\frac{2}{t^2-1}\right)^2+$

$\left(\frac{-2t}{t^2-1}\right)^2=\frac{80}{9}$,

化简可得 $20t^4-49t^2+11=0$,解得 $t=\pm\frac{1}{2}$ 或 $t=\pm\frac{\sqrt{55}}{5}$.

因为直线 AB 交双曲线右支于两点,所以 $x_1+x_2=\frac{-4}{t^2-1}>0$,则 $t^2<1$,故舍去 $t=\pm\frac{\sqrt{55}}{5}$,

可得直线 AB 的方程为 $x=\pm\frac{1}{2}y+2$.

综上,直线 AB 的方程为 $y=2x-4$ 或 $y=-2x+4$ 或 $x=2$.

4. **解**:(1)由题意知 $f(x)=e^{x+1}+ax+a$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,$f'(x)=e^{x+1}+a$. 当 $a\geqslant 0$ 时,$f'(x)>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 当 $a<0$ 时,令 $f'(x)=0$,得 $x=\ln(-a)-1$,且当 $x\in(-\infty,\ln(-a)-1)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(\ln(-a)-1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-a)-1)$ 上单调递减,在 $(\ln(-a)-1,+\infty)$ 上单调递增. 综上,当 $a\geqslant 0$ 时,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;当 $a<0$ 时,$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-a)-1)$ 上单调递减,在 $(\ln(-a)-1,+\infty)$ 上单调递增.

(2)当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x-1)+\ln(x+1)\geqslant 1$ 恒成立,即当 $x\geqslant 0$ 时,$e^x+ax+\ln(x+1)-1\geqslant 0(*)$ 恒成立. 令 $g(x)=e^x+ax+\ln(x+1)-1(x\geqslant 0)$,则 $g'(x)=e^x+a+\frac{1}{x+1}(x\geqslant 0)$.

由(1)知,当 $a=-1$ 时,$f(x)=e^{x+1}-x-1$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增,故当 $x\geqslant -1$ 时,$f(x)\geqslant f(-1)=e^{-1+1}+1-1=1$,即 $f(x)=e^{x+1}-x-1\geqslant 1$,得 $e^{x+1}\geqslant x+1+1$,故当 $x\geqslant 0$ 时,$e^x\geqslant x+1$. 若 $a\geqslant -2$,则 $g'(x)=e^x+\frac{1}{x+1}+a\geqslant (x+1)+\frac{1}{x+1}+a\geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}+a=2+a\geqslant 0$ $\left(\text{当且仅当 } x+1=\frac{1}{x+1},e^x=x+1,\text{即 } x=0,\text{且 } a=-2 \text{ 时取等号}\right)$,$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,$\therefore g(x)\geqslant g(0)=0$,$\therefore$ 当 $x\geqslant 0$ 时,$(*)$ 式恒成立. 若 $a<-2$,令 $\varphi(x)=e^x+\frac{1}{x+1}+a(x\geqslant 0)$,则 $\varphi'(x)=e^x-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2e^x-1}{(x+1)^2}\geqslant 0$,当且仅当 $x=0$ 时等号成立,$\therefore \varphi(x)=e^x+\frac{1}{x+1}+a$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增,$\because \varphi(0)=2+a<0$,$\varphi(-a)=e^{-a}+\frac{1}{1-a}+a>1-a+\frac{1}{1-a}+a=1+\frac{1}{1-a}>0$,$\therefore$ 存在 $x_0\in(0,-a)$,使得 $\varphi(x_0)=0$,则当 $0<x<x_0$ 时,$\varphi(x)<\varphi(x_0)=0$,即 $g'(x)<0$,$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递减,$\therefore g(x_0)<g(0)=0$,即当 $x\geqslant 0$ 时,$(*)$ 式不恒成立. 综上所述,实数 a 的取值范围是 $[-2,+\infty)$.

训练 55 三角+概率统计+立体几何+函数与导数

1. **解**:(1)在 $\triangle ABC$ 中,有 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$,即 $bc\cdot\cos A=-\frac{1}{3}ac\cdot\cos B=-\frac{1}{2}ab\cdot\cos C$. 因为 $bc\cdot\cos A=-\frac{1}{3}ac\cdot\cos B$,所以 $\sin B\cos A=-\frac{1}{3}\sin A\cos B$,即 $\tan A=-3\tan B$. 同理 $\tan C=\frac{3}{2}\tan B$. 在 $\triangle ABC$ 中,有 $\tan A=\tan(\pi-B-C)=-\tan(B+C)=\frac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C-1}$,解得 $\tan A=-1$,$\tan B=\frac{1}{3}$,$\tan C=\frac{1}{2}$. 由 $0<A<\pi$,得 $A=\frac{3\pi}{4}$.

(2)$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$,代入 $A=\frac{3\pi}{4}$,$b=2$,整理得 $S=\frac{\sqrt{2}}{2}c$. 由(1)知 $\tan B=\frac{1}{3}$,$\tan C=\frac{1}{2}$,所以 $\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$,$\sin C=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理可得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,解得 $c=2\sqrt{2}$,所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2\sqrt{2}=2$.

2. **解**:(1)记事件 A="每个 AI 芯片智能检测不达标",则 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{49}{50}\times\frac{48}{49}\times\frac{47}{48}=\frac{3}{50}$.

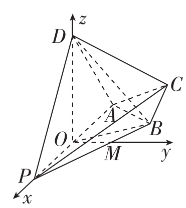
(2)由题意,$f(p)=C_{50}^1p(1-p)^{49}$,$\therefore f'(p)=50[(1-p)^{49}+p\times 49(1-p)^{48}\times(-1)]=50(1-p)^{48}(1-50p)$,

令 $f'(p)=0$,则 $p=\frac{1}{50}$,当 $0<p<\frac{1}{50}$ 时,$f'(p)>0$,$f(p)$ 单调递增,当 $1>p>\frac{1}{50}$ 时,$f'(p)<0$,$f(p)$ 单调递减,所以当 $p=\frac{1}{50}$ 时,$f(p)$ 取得最大值,故 $p_0=\frac{1}{50}$.

(3)记事件 B="人工检测达标",则 $P(B|\overline{A})=1-\frac{1}{50}=\frac{49}{50}$,又 $P(\overline{A})=1-\frac{3}{50}=\frac{47}{50}$,所以 $P(\overline{A}\cdot B)=P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{47}{50}\times\frac{49}{50}=92.12\%<93\%$,所以需要对生产工序进行改良.

3. **解**:(1)取 AP 的中点 O,连接 DO,OB,则 $OD\perp AP$,$AO=2$,又$\because$平面 $PAB\perp$ 平面 PAD,平面 $PAB\cap$ 平面 $PAD=AP$,$OD\subset$ 平面 PAD,$\therefore DO\perp$ 平面 APB. $\because AB\subset$ 平面 APB,$\therefore DO\perp AB$. 又 $\because DB\perp BA$,$DO\cap DB=D$,$DO,DB\subset$ 平面 DOB,$\therefore AB\perp$ 平面 DOB. $\because BO\subset$ 平面 DOB,

$\therefore AB\perp BO$,又 $\angle PAB=\frac{\pi}{4}$,$\therefore AB=\frac{\sqrt{2}}{2}AO=\sqrt{2}$.



(2)在平面 APB 内,过 O 作 AP 的垂线 OM,则 OM,OP,OD 两两垂直,以 O 为坐标原点,OP,OM,OD 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $A(-2,0,0)$,$B(-1,1,0)$,$D(0,0,2)$,$P(2,0,0)$,所以 $\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{AD}=(2,0,2)$. 设平面 DAB(即平面 ACD)的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=a+b=0,\\ \overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}=2a+2c=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}=(-1,1,1)$. 设 $\overrightarrow{DC}=t\overrightarrow{AB}(t>2)$,$\therefore \overrightarrow{DC}=(t,t,0)$,$\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=(t+2,t,2)$,设平面 ACP 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,$\overrightarrow{AP}=(4,0,0)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{m}=(t+2)x+ty+2z=0,\\ \overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{m}=4x=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{m}=(0,2,-t)$. $\because$ 平面 PAC 与平面 ACD 夹角的余弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{15}$,

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{15}=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|2-t|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{t^2+4}}$,

$\therefore 6t^2-25t+24=0$,$\therefore (3t-8)(2t-3)=0$,

解得 $t=\frac{8}{3}$ 或 $t=\frac{3}{2}$(舍),$\therefore CD=\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

4. **解**:(1)$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}(x>0)$.

①若 $a\leqslant 0$,则 $f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 至多有一个零点,不符合题意.

②若 $a>0$,令 $f'(x)=0$,解得 $x=\frac{1}{a}$.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时,$f'(x)<0$.

所以 $f(x)=\ln x-ax$ 的极大值为 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1$,当 $x\to 0^+$ 时,$f(x)<0$,当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)<0$,

由题意知 $\ln\frac{1}{a}-1>0$,解得 $0<a<\frac{1}{e}$.

所以实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$.

(2)证明:由(1)知,要使 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点 x_1,$x_2(x_1<x_2)$,则有 $0<a<\frac{1}{e}$.

因为 $f(x_1)=f(x_2)=0$,所以 $\begin{cases}\ln x_1=ax_1,\\ \ln x_2=ax_2,\end{cases}$

所以 $a(x_2-x_1)=\ln x_2-\ln x_1$,即 $a=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$,

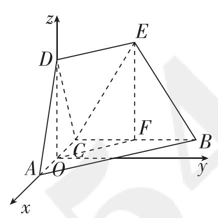
所以要证 $x_1+x_2>\frac{2}{a}$,只需证 $a>\frac{2}{x_1+x_2}$,即证 $\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}>\frac{2}{x_1+x_2}$,即证 $\ln x_2-\ln x_1>\frac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}$,即证 $\ln\frac{x_2}{x_1}>\frac{2\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)}{\frac{x_2}{x_1}+1}$. 令 $t=\frac{x_2}{x_1}>1$,$\varphi(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$,则只需证 $\varphi(t)>0$,又 $\varphi'(t)=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$,所以 $\varphi(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $\varphi(t)>\varphi(1)=0$,原命题得证.

训练 56 三角+立体几何+数列+圆锥曲线

1. **解**:(1)$f(x)=\sin 2x+2\sin^2 x+2=\sin 2x+(1-\cos^2 x)+2=\sin 2x-\cos 2x+3=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+3$,故 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. 因为 $-1\leqslant\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$,所以 $-\sqrt{2}\leqslant\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$,所以 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{2}+3,\sqrt{2}+3]$.

(2)$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+3$,令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,得 $x\in\left[k\pi-\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{3\pi}{8}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$,故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{3\pi}{8}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.

2. **解**:(1)证明:取 AC 的中点 O,连接 DO,OF. ∵在△DAC 中,$DA=DC$,∴$DO\perp AC$. ∵平面 $DAC\perp$ 平面 ABC,平面 $DAC\cap$ 平面 $ABC=AC$,$DO\subset$ 平面 DAC,∴$DO\perp$ 平面 ABC. ∵O,F 分别为 AC,BC 的中点,∴$OF/\!/AB$,且 $AB=2OF$.



又 $DE/\!/AB$,$AB=2DE$,
∴$OF/\!/DE$,且 $OF=DE$,∴四边形 $DEFO$ 为平行四边形,
∴$EF/\!/DO$,∴$EF\perp$ 平面 ABC.

(2)∵$DO\perp$ 平面 ABC,$AC\perp BC$,∴AC,BC,OD 两两垂直,以 O 为原点,OA 所在直线为 x 轴,过点 O 与 CB 平行的直线为 y 轴,OD 所在直线为 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $A(1,0,0)$,$C(-1,0,0)$,$B(-1,4,0)$,$\overrightarrow{AB}=(-2,4,0)$. ∵$EF\perp$ 平面 ABC,∴直线 BE 与平面 ABC 所成的角为 $\angle EBF=60^\circ$,∴$DO=EF=BF\tan 60^\circ=2\sqrt{3}$,∴$D(0,0,2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AD}=(-1,0,2\sqrt{3})$. 平面 DAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$,设平面 $ABED$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+4y=0,\\ -x+2\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$,则 $x=2\sqrt{3}$,$y=\sqrt{3}$,∴$\boldsymbol{n}=(2\sqrt{3},\sqrt{3},1)$,∴$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{4}$,∴平面 $ABED$ 与平面 DAC 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

3. **解**:(1)由已知可得,$S_{n+1}=2S_n+n+3$,当 $n\geqslant 2$ 时,$S_n=2S_{n-1}+n+2$,两式相减得 $a_{n+1}=2a_n+1(n\geqslant 2)$. 又因为 $a_1+a_2=2a_1+4$,所以 $a_2=7=2a_1+1$,满足上式,所以 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$. 又 $a_1+1=4$,所以 $\{a_n+1\}$ 是以 4 为首项,2 为公比的等比数列,所以 $a_n+1=4\cdot 2^{n-1}$,即 $a_n=2^{n+1}-1$.

因为 $b_{n+1}=\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)b_n=\frac{2n+1}{2n-1}b_n$,所以 $b_n=\frac{2n-1}{2n-3}b_{n-1}(n\geqslant 2)$. 又 $b_1=1$,所以当 $n\geqslant 2$ 时,有 $b_1=1$,$b_2=3b_1$,$b_3=\frac{5}{3}b_2$,$b_4=\frac{7}{5}b_3$,…,$b_n=\frac{2n-1}{2n-3}b_{n-1}$,两边同时相乘可得 $b_1b_2b_3\cdots b_{n-1}b_n=1\times 3\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n-3}b_1b_2b_3\cdots b_{n-1}=(2n-1)b_1b_2b_3\cdots b_{n-1}$,所以 $b_n=2n-1(n\geqslant 2)$,当 $n=1$ 时,$b_1=1$ 满足上式,故 $b_n=2n-1$.

(2)设前 100 项中,来自数列 $\{a_n\}$ 的有 m 项. 若第 100 项来自 $\{a_n\}$,则应有 $m+2\times 1-1+2\times 2-1+\cdots+2(m-1)-1=100$,整理可得 $m^2-m-99=0$,该方程没有正整数解,不满足题意;若第 100 项来自 $\{b_n\}$,则应有 $m+2\times 1-1+2\times 2-1+\cdots+2(m-1)-1<100$ 且 $m+2\times 1-1+2\times 2-1+\cdots+2m-1\geqslant 100$,整理可得 $m^2-m-99<0$ 且 $m^2+m-100\geqslant 0$. 又 $m\in\mathbf{N}^*$,故 $m=10$,所以数列 $\{c_n\}$ 中含有 10 项数列 $\{a_n\}$ 中的项,含有 90 项数列 $\{b_n\}$ 中的项,所以 $c_1+c_2+\cdots+c_{100}=a_1+a_2+\cdots+a_{10}+(b_1+b_2+\cdots+b_{90})=2^2-1+2^3-1+\cdots+2^{11}-1+1+3+5+\cdots+2\times 90-1=2^2+2^3+\cdots+2^{11}-10+1+3+5+\cdots+179=\frac{4\times(1-2^{10})}{1-2}-10+\frac{90}{2}\times(1+179)=12\ 182$.

4. **解**:(1)若 $m=0$,则直线 l 的方程为 $y=kx+2$. 由 $\begin{cases}y=kx+2,\\ \frac{x^2}{4}-y^2=1\end{cases}$ 得 $(1-4k^2)x^2-16kx-20=0(*)$,要使直线 l 与双曲线 C 只有一个交点,则方程$(*)$只有一个解. ①当 $1-4k^2=0$,即 $k=\pm\frac{1}{2}$ 时,满足要求;②当 $1-4k^2\neq 0$,即 $k\neq\pm\frac{1}{2}$ 时,令 $\Delta=(-16k)^2+80(1-4k^2)=0$,得 $k=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. 综上所述,$k=\pm\frac{1}{2}$ 或 $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线 l 的方程为 $y-2=k(x-m)$,即 $y=kx+2-mk$. 由 $\begin{cases}y=kx+2-mk,\\ \frac{x^2}{4}-y^2=1\end{cases}$ 得 $(1-4k^2)x^2+8k(mk-2)x-4(m^2k^2-4mk+5)=0$,所以 $x_1+x_2=\frac{8k(mk-2)}{4k^2-1}$,$x_1x_2=\frac{4(m^2k^2-4mk+5)}{4k^2-1}$,所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+4-2mk=\frac{8k^2(mk-2)}{4k^2-1}+4-2mk=\frac{2mk-4}{4k^2-1}$,$y_1x_2+y_2x_1=2kx_1x_2+(2-mk)(x_1+x_2)=\frac{8k(m^2k^2-4mk+5)}{4k^2-1}+\frac{8k(2-mk)(mk-2)}{4k^2-1}=\frac{8k}{4k^2-1}$,从而 $k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{y_1x_2+y_2x_1-2(y_1+y_2)}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=$

$$\frac{\frac{8k}{4k^2-1}-\frac{2(2mk-4)}{4k^2-1}}{\frac{4(m^2k^2-4mk+5)}{4k^2-1}-\frac{16k(mk-2)}{4k^2-1}+4}=$$

$\frac{(8-4m)k+8}{(4m^2-16m+16)k^2+(32-16m)k+16}$,要使 k_1+k_2 为定值,则 $\begin{cases}4m^2-16m+16=0,\\ 16(8-4m)=8(32-16m),\end{cases}$ 解得 $m=2$.

训练 57 概率统计+数列+圆锥曲线+函数与导数

1. **解**:(1)零假设为 H_0:首次补贴金额是否低于 2000 元与性别无关联,根据列联表中的数据得到 $\chi^2=\frac{400\times(160\times 60-40\times 140)^2}{200\times 200\times 300\times 100}\approx 5.333<6.635=x_{0.01}$,

依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,没有充分证据推断 H_0 不成立,因此可以认为 H_0 成立,即认为首次补贴金额是否低于 2000 元与性别无关联.

(2)由题意知,抽取的 5 人中,男性有 $40\times\frac{5}{100}=2$(人),记为 a,b;女性有 $60\times\frac{5}{100}=3$(人),记为 A,B,C.

从 a,b,A,B,C 中随机抽取 2 人包含的样本点有 (a,b),(a,A),(a,B),(a,C),(b,A),(b,B),(b,C),(A,B),(A,C),(B,C),共 10 个,其中 2 人中恰好是一男一女包含的样本点有 (a,A),(a,B),(a,C),(b,A),(b,B),(b,C),共 6 个,

所以抽取的 2 人中恰好是一男一女的概率为 $\frac{6}{10}=0.6$.

2. **解**:(1)证明:$\because S_n+a_n=\dfrac{n-1}{n^2+n}$,且 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$,

$\therefore 2S_n-S_{n-1}=\dfrac{2}{n+1}-\dfrac{1}{n}$,

$\therefore 2\left(S_n-\dfrac{1}{n+1}\right)=S_{n-1}-\dfrac{1}{n}(n\geqslant 2)$,

$\therefore \dfrac{S_n-\dfrac{1}{n+1}}{S_{n-1}-\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}(n\geqslant 2)$,在 $S_n+a_n=\dfrac{n-1}{n^2+n}$ 中,令 $n=1$,可得 $S_1=0$,$\therefore S_1-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$,

$\therefore$数列$\left\{S_n-\dfrac{1}{n+1}\right\}$是首项为$-\dfrac{1}{2}$,公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列.

(2)由(1)可得 $S_n-\dfrac{1}{n+1}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$,

$\therefore \dfrac{1}{b_n}=-\left(S_n-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{2^n}$,$\therefore b_n=2^n$,

$\therefore \dfrac{b_n}{(b_n-1)(b_{n+1}-1)}=\dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$,

$\therefore T_n=\left(\dfrac{1}{2^1-1}-\dfrac{1}{2^2-1}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2-1}-\dfrac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$.

3. **解**:(1)由题可知,双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点$(\pm 2\sqrt{2},2)$,$(4,\pm 2\sqrt{3})$,则$\begin{cases}\dfrac{8}{a^2}-\dfrac{4}{b^2}=1,\\ \dfrac{16}{a^2}-\dfrac{12}{b^2}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=4,\end{cases}$

故双曲线 E 的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$.

(2)方法一:当直线 l 的斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)+2$,与双曲线方程联立,得$(k^2-1)x^2-(8k^2-4k)x+16k^2-16k+8=0$.设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则有 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2-4k}{k^2-1}$,$x_1x_2=\dfrac{16k^2-16k+8}{k^2-1}$.

设 $P(t,t+1)$,则 $k_1k_2=\dfrac{(y_1-t-1)(y_2-t-1)}{(x_1-t)(x_2-t)}=\dfrac{(kx_1-4k-t+1)(kx_2-4k-t+1)}{(x_1-t)(x_2-t)}=\dfrac{k^2x_1x_2-k(4k+t-1)(x_1+x_2)+(4k+t-1)^2}{x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2}=\dfrac{k^2(16k^2-16k+8)-k(4k+t-1)(8k^2-4k)+(4k+t-1)^2(k^2-1)}{16k^2-16k+8-t(8k^2-4k)+t^2(k^2-1)}=\dfrac{(t^2+2t-11)k^2-8(t-1)k-(t-1)^2}{(t-4)^2k^2+4(t-4)k-(t^2-8)}$.

当 $t=4$ 时,不满足 k_1k_2 为定值.当 $t\neq 4$ 时,若 k_1k_2 为定值,则$\dfrac{t^2+2t-11}{(t-4)^2}=\dfrac{-8(t-1)}{4(t-4)}=\dfrac{-(t-1)^2}{-(t^2-8)}$,解得 $t=3$,此时 $k_1k_2=4$.

经检验,当直线 l 的斜率不存在时,对 $P(3,4)$,也满足 $k_1k_2=4$.所以点 P 的坐标为$(3,4)$.

方法二:当直线 l 的斜率存在时,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,$P(x_0,y_0)$,直线 MN:$y=k(x-4)+2$,与双曲线方程 $x^2-y^2-4=0$ 联立可得 $x^2-[k(x-4)+2]^2-4=0$,注意到 x_1,x_2 为方程 $x^2-[k(x-4)+2]^2-4=0$ 的两根,故有恒等式 $x^2-[k(x-4)+2]^2-4=(1-k^2)(x-x_1)(x-x_2)$,则 $x_0^2-[k(x_0-4)+2]^2-4=(1-k^2)(x_0-x_1)(x_0-x_2)$,同理由 $y=k(x-4)+2$,可得 $x=\dfrac{y-2}{k}+4$,与双曲线方程 $x^2-y^2-4=0$ 联立可得$\left(\dfrac{y-2}{k}+4\right)^2-y^2-4=0$,即$(y-2+4k)^2-k^2y^2-4k^2=0$,

注意到 y_1,y_2 为方程$(y-2+4k)^2-k^2y^2-4k^2=0$ 的两根,故有恒等式$(y-2+4k)^2-k^2y^2-4k^2=(1-k^2)(y-y_1)(y-y_2)$,则$(y_0-2+4k)^2-k^2y_0^2-4k^2=(1-k^2)(y_0-y_1)(y_0-y_2)$,则

$k_1k_2=\dfrac{(y_0-y_1)(y_0-y_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\dfrac{(1-k^2)(y_0-y_1)(y_0-y_2)}{(1-k^2)(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\dfrac{(y_0-2+4k)^2-k^2y_0^2-4k^2}{x_0^2-[k(x_0-4)+2]^2-4}=\dfrac{(-y_0^2+12)k^2+(8y_0-16)k+y_0^2-4y_0+4}{(-x_0^2+8x_0-16)k^2+(-4x_0+16)k+x_0^2-8}$.若 k_1k_2 为定值,则必有 $\dfrac{-y_0^2+12}{-x_0^2+8x_0-16}=\dfrac{8y_0-16}{-4x_0+16}=\dfrac{y_0^2-4y_0+4}{x_0^2-8}$,计算可得$\begin{cases}x_0=3,\\ y_0=4\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=-\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\\ y_0=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\\ y_0=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\end{cases}$又因为点 P 在直线 $y=x+1$ 上,所以点 P 的坐标为$(3,4)$.经检验,当直线 l 的斜率不存在时,对 $P(3,4)$,也满足 $k_1k_2=4$.所以点 P 的坐标为$(3,4)$.

4. **解**:(1)当 $k=0$ 时,$f(x)=xe^x(x\in\mathbf{R})$,
所以 $f'(x)=(1+x)e^x$,令 $f'(x)=0$,则 $x=-1$,
在$[-2,2]$上,当 x 变化时,$f(x)$,$f'(x)$的变化情况如下表,

x	$[-2,-1)$	-1	$(1,2]$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $f(x)$在$[-2,2]$上的最小值为 $f(-1)=-e^{-1}=-\dfrac{1}{e}$,

又 $f(-2)=-\dfrac{2}{e^2}$,$f(2)=2e^2$,

所以 $f(x)$在$[-2,2]$上的取值范围为$\left[-\dfrac{1}{e},2e^2\right]$.

(2)函数 $f(x)=xe^x-kx^2=x(e^x-kx)$,
令 $g(x)=e^x-kx$,$x>0$,则原问题等价于 $g(x)$在$(0,+\infty)$上有且仅有两个零点,
$g'(x)=e^x-k$,因为 $x\in(0,+\infty)$,所以 $e^x>1$.
①当 $k\in(-\infty,1]$时,$g'(x)>0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立,所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,
所以 $g(x)>g(0)=1$,所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上没有零点,不符合题意.
②当 $k\in(1,+\infty)$时,令 $g'(x)=0$,得 $x=\ln k$,
当 $x\in(0,\ln k)$时,$g'(x)<0$,当 $x\in(\ln k,+\infty)$时,$g'(x)>0$,
所以 $g(x)$在$(0,\ln k)$上单调递减,在$(\ln k,+\infty)$上单调递增,
所以 $g(x)$的最小值为 $g(\ln k)=k-k\cdot\ln k$,
因为 $g(x)$在$(0,+\infty)$上有且仅有两个零点,
所以 $g(\ln k)=k-k\cdot\ln k<0$,所以 $k>e$.
$g(0)=1>0$,$g(\ln k^2)=k^2-k\cdot\ln k^2=k(k-2\ln k)$,

令 $h(x)=x-2\ln x$,则 $h'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$,

当 $x\in(0,2)$时,$h'(x)<0$,当 $x\in(2,+\infty)$时,$h'(x)>0$,所以 $h(x)$在$(0,2)$上单调递减,在$(2,+\infty)$上单调递增,
所以 $h(x)\geqslant h(2)=2-2\ln 2=\ln e^2-\ln 4>0$,所以 $g(\ln k^2)=k(k-2\ln k)>0$,
所以当 $k>e$ 时,$g(x)$在$(0,\ln k)$和$(\ln k,+\infty)$上各有一个零点,即当 $k>e$ 时,$g(x)$在$(0,+\infty)$上有且仅有两个零点.
综上,实数 k 的取值范围是$(e,+\infty)$.

训练 58　三角+圆锥曲线+概率统计+函数与导数

1. **解**:(1)证明:因为 $a\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3}{2}b$,所以$\dfrac{a(1+\cos C)+c(1+\cos A)}{2}=\dfrac{3}{2}b$,

即 $a+c+a\cos C+c\cos A=3b$,由正弦定理得 $3\sin B=\sin A+\sin C+(\sin A\cos C+\cos A\sin C)=\sin A+\sin C+\sin(A+C)=\sin A+\sin C+\sin B$,所以 $\sin A+\sin C=2\sin B$.

(2)由 $\sin A+\sin C=2\sin B$ 及正弦定理得 $a+c=2b=4$,因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A=3$,所以 $bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{4+c^2-a^2}{2}=3$,可得 $c^2-a^2=2$,即$(c-a)(c+a)=4(c-a)=2$,所以 $c-a=\dfrac{1}{2}$,所以 $c=\dfrac{9}{4}$,$a=\dfrac{7}{4}$,所以 $\cos A=\dfrac{3}{bc}=\dfrac{3}{2\times\dfrac{9}{4}}=\dfrac{2}{3}$,

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times2\times\frac{9}{4}\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{3\sqrt{5}}{4}$.

2. **解**:(1)由题知,$a=2$,$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则 $c=\sqrt{3}$,所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$,所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)证明:设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm2)$,则$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$,直线 AP 的斜率为$\frac{y_0}{x_0+2}$,直线 BP 的斜率为$\frac{y_0}{x_0-2}$,所以直线 BP 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$,所以点 N 的坐标为$\left(-6,\frac{-8y_0}{x_0-2}\right)$,所以直线 AN 的斜率为$\frac{\frac{-8y_0}{x_0-2}}{-6+2}=\frac{2y_0}{x_0-2}$,所以直线 AP 与 AN 的斜率之积为$\frac{y_0}{x_0+2}\cdot\frac{2y_0}{x_0-2}=\frac{2y_0^2}{x_0^2-4}=\frac{2\left(1-\frac{x_0^2}{4}\right)}{x_0^2-4}=-\frac{1}{2}$,

所以直线 AP 与 AN 的斜率之积为定值 $-\frac{1}{2}$.

3. **解**:(1)用 A_i 表示“第 i 局比赛甲获胜”($i\in\mathbf{N}^*$),用 B_j 表示“第 j 局比赛乙获胜”($j\in\mathbf{N}^*$),用 C_m 表示“第 m 局比赛平局”($m\in\mathbf{N}^*$),

则 $P(A_i)=\alpha=\frac{2}{5}$,$P(B_j)=\beta=\frac{2}{5}$,$P(C_m)=\gamma=\frac{1}{5}$,

记“进行 4 局比赛后甲学员赢得比赛”为事件 N,

则 $N=A_1B_2A_3A_4+B_1A_2A_3A_4+A_1C_2C_3A_4+C_1A_2C_3A_4+C_1C_2A_3A_4$,

所以 $P(N)=P(A_1B_2A_3A_4)+P(B_1A_2A_3A_4)+P(A_1C_2C_3A_4)+P(C_1A_2C_3A_4)+P(C_1C_2A_3A_4)=2\alpha^3\beta+3\alpha^2\gamma^2=2\times\left(\frac{2}{5}\right)^4+3\times\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{44}{625}$.

(2)(i)因为 $\gamma=0$,所以每局比赛结果仅有“甲获胜”和“乙获胜”,即 $\alpha+\beta=1$.

由题意得,X 的所有可能取值为 2,4,5,则 $P(X=2)=\alpha^2+\beta^2$,

$P(X=4)=(\alpha\beta+\beta\alpha)\alpha^2+(\alpha\beta+\beta\alpha)\beta^2=2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$,

$P(X=5)=(\alpha\beta+\beta\alpha)\cdot(\alpha\beta+\beta\alpha)\cdot1=4\alpha^2\beta^2$,

所以 X 的分布列为

X	2	4	5
P	$\alpha^2+\beta^2$	$2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$	$4\alpha^2\beta^2$

所以 X 的期望 $E(X)=2(\alpha^2+\beta^2)+8\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+20\alpha^2\beta^2=2(1-2\alpha\beta)+8\alpha\beta(1-2\alpha\beta)+20\alpha^2\beta^2=4\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta+2$.

因为 $\alpha+\beta=1\geqslant2\sqrt{\alpha\beta}$,所以 $\alpha\beta\leqslant\frac{1}{4}$,当且仅当 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$时,等号成立,所以 $\alpha\beta\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$,

所以 $E(X)=4\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta+2=(2\alpha\beta+1)^2+1\leqslant\left(2\times\frac{1}{4}+1\right)^2+1=\frac{13}{4}$,故 $E(X)$的最大值为$\frac{13}{4}$.

(ii)记“甲学员赢得比赛”为事件 M,

由题意,比赛最少进行 2 局,前两局比赛的可能结果有“甲学员赢得比赛”“乙学员赢得比赛”“甲、乙两名学员各得 1 分”,

由(1)得 A_1A_2=“前两局比赛甲学员赢得比赛”,

B_1B_2=“前两局比赛乙学员赢得比赛”,$A_1B_2\cup B_1A_2$=“前两局比赛甲、乙两名学员各得 1 分”,

又当甲、乙两名学员得分总数相同时,甲学员赢得比赛的概率与比赛一开始甲学员赢得比赛的概率相同,

所以 $P(M)=P(A_1A_2)\cdot1+P(B_1B_2)\cdot0+P(A_1B_2\cup B_1A_2)\cdot P(M)=P(A_1A_2)+P(A_1B_2)\cdot P(M)+P(B_1A_2)\cdot P(M)=P(A_1)P(A_2)+P(A_1)P(B_2)P(M)+P(B_1)P(A_2)P(M)=\alpha^2+\alpha\beta P(M)+\beta\alpha P(M)=\alpha^2+2\alpha\beta P(M)$,

所以$(1-2\alpha\beta)P(M)=\alpha^2$,即 $P(M)=\frac{\alpha^2}{1-2\alpha\beta}$,

因为 $\alpha+\beta=1$,所以 $P(M)=\frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}$.

4. **解**:(1)函数 $f(x)=\sqrt{x}\cdot e^{ax}$,$x>0$,

则 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{ax}+a\sqrt{x}\cdot e^{ax}=\frac{2ax+1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{ax}$,

当 $a\geqslant0$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

当 $a<0$ 时,由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<-\frac{1}{2a}$,由 $f'(x)<0$ 得 $x>-\frac{1}{2a}$,则 $f(x)$在$\left(0,-\frac{1}{2a}\right)$上单调递增,在$\left(-\frac{1}{2a},+\infty\right)$上单调递减,

所以当 $a\geqslant0$ 时,函数 $f(x)$的单调递增区间是$(0,+\infty)$;

当 $a<0$ 时,函数 $f(x)$的单调递增区间是$\left(0,-\frac{1}{2a}\right)$,单调递减区间是$\left(-\frac{1}{2a},+\infty\right)$.

(2)因为 $a>0$,且当 $x\in(0,+\infty)$时,不等式$\left(\frac{e^{ax}}{x}\right)^{2a}\geqslant\frac{\ln x}{ax}$恒成立,

所以当 $0<x\leqslant1$ 时,对任意 $a>0$,$\left(\frac{e^{ax}}{x}\right)^{2a}>0\geqslant\frac{\ln x}{ax}$恒成立,

因此 $a>0$.

当 $x>1$ 时,$\left(\frac{e^{ax}}{x}\right)^{2a}>0$,$\frac{\ln x}{ax}>0$,由$\left(\frac{e^{ax}}{x}\right)^{2a}\geqslant\frac{\ln x}{ax}$,得 $2a\ln e^{ax}-2a\ln x\geqslant\ln(\ln x)-\ln(ax)$,所以 $2a\ln e^{ax}+\ln(\ln e^{ax})\geqslant2a\ln x+\ln(\ln x)(*)$.

令 $g(x)=2ax+\ln x$,则不等式$(*)$等价于 $g(\ln e^{ax})\geqslant g(\ln x)$,

而 $g'(x)=2a+\frac{1}{x}>0$,即函数 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,因此当 $x>1$ 时,$\ln e^{ax}\geqslant\ln x$ 恒成立,

即当 $x>1$ 时,$ax\geqslant\ln x$ 恒成立,即 $a\geqslant\frac{\ln x}{x}$恒成立,令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$,$x>1$,则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,

当 $1<x<e$ 时,$h'(x)>0$,当 $x>e$ 时,$h'(x)<0$,所以函数 $h(x)$在$(1,e)$上单调递增,在$(e,+\infty)$上单调递减,

所以 $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$,因此 $a\geqslant\frac{1}{e}$.

综上,实数 a 的取值范围是$\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

训练 59 数列+函数与导数+概率统计+立体几何

1. **解**:(1)证明:因为 $8S_n=(a_n+2)^2$,所以 $8S_{n+1}=(a_{n+1}+2)^2$,

两式相减得 $8S_{n+1}-8S_n=(a_{n+1}+2)^2-(a_n+2)^2=a_{n+1}^2-a_n^2+4a_{n+1}-4a_n$,

即 $8a_{n+1}=a_{n+1}^2-a_n^2+4a_{n+1}-4a_n$,

整理得$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-4)=0$,

因为 $a_{n+1}+a_n>0$,所以 $a_{n+1}-a_n=4(n\in\mathbf{N}^*)$.

又因为当 $n=1$ 时,$8S_1=(a_1+2)^2$,即 $8a_1=(a_1+2)^2$,解得 $a_1=2$,所以数列$\{a_n\}$是以 2 为首项,4 为公差的等差数列.

(2)由(1)知,$a_n=2+4(n-1)=4n-2$,

又 $a_n=\log_{\sqrt{3}}b_n$,所以 $\log_{\sqrt{3}}b_n=4n-2$,

所以 $b_n=(\sqrt{3})^{4n-2}=3^{2n-1}$.

因为$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{3^{2n+1}}{3^{2n-1}}=9$,$b_1=3$,

所以$\{b_n\}$是以 3 为首项,9 为公比的等比数列,

所以 $T_n=\frac{3(1-9^n)}{1-9}=\frac{3(9^n-1)}{8}$.

2. **解**:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$,$f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$,所以当 $x\in(0,1)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,当 $x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,故 $f(x)$的单调递增区间为$(0,1)$,单调递减区间为$(1,+\infty)$.

(2)证明:$f'(x)=\frac{a(1-a-\ln x)}{x^2}$. 因为 $a>0$,所以当 $x\in(0,e^{1-a})$时,$f'(x)>0$,当 $x\in(e^{1-a},+\infty)$时,$f'(x)<0$,所以

$f(x)_{\max}=f(e^{1-a})=\frac{a}{e^{1-a}}$. 当 $a>0$ 时,要证 $f(x)\leqslant e^{2a-2}$,只需证$\frac{a}{e^{1-a}}\leqslant e^{2a-2}$,即证 $e^{a-1}\geqslant a$. 记 $g(a)=e^{a-1}-a(a>0)$,则 $g'(a)=e^{a-1}-1$,当 $a\in(0,1)$时,$g'(a)<0$,当 $a\in(1,+\infty)$时,$g'(a)>0$,所以 $g(a)_{\min}=g(1)=0$,所以 $g(a)\geqslant 0$ 恒成立,即当 $a>0$ 时,$e^{a-1}\geqslant a$,所以当 $a>0$ 时,$f(x)\leqslant e^{2a-2}$.

3. **解**:(1)一次游戏中,小球落入 B 袋中的概率 $P(B)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$,小球落入 A 袋中的概率 $P(A)=1-P(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. 故 $P_1=P(A)=\frac{3}{4}$,$P_2=\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{13}{16}$,$P_3=\left(\frac{3}{4}\right)^3+C_2^1\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{51}{64}$.

(2)游戏过程中累计得 $n(n\geqslant 3)$分可以分为两种情况:①得到 $n-2$ 分后的一次游戏中小球落入 B 袋中;②得到 $n-1$ 分后的一次游戏中小球落入 A 袋中.

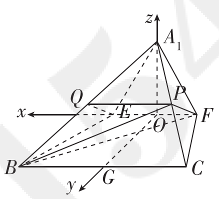
则 $P_n=\frac{3}{4}P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}(n\geqslant 3)$,即 $P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}=P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}(n\geqslant 3)$,

故$\left\{P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}\right\}(n\geqslant 2)$为常数列,又 $P_2+\frac{1}{4}P_1=1$,所以 $P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}=1(n\geqslant 2)$,即 $P_n=1-\frac{1}{4}P_{n-1}(n\geqslant 2)$.

由 $P_n=1-\frac{1}{4}P_{n-1}(n\geqslant 2)$,得 $P_n-\frac{4}{5}=-\frac{1}{4}\left(P_{n-1}-\frac{4}{5}\right)(n\geqslant 2)$,

故$\left\{P_n-\frac{4}{5}\right\}$为等比数列,且首项为 $P_1-\frac{4}{5}=\frac{3}{4}-\frac{4}{5}=-\frac{1}{20}$,公比为$-\frac{1}{4}$,所以 $P_n-\frac{4}{5}=\left(-\frac{1}{20}\right)\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{5}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^n$,所以 $P_n=\frac{1}{5}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\frac{4}{5}$.

4. **解**:(1)证明:如图,取 A_1B 的中点 Q,连接 PQ,EQ,易知 $PQ/\!/BC$,$PQ=\frac{1}{2}BC$ 且 $FE/\!/BC$,$FE=\frac{1}{2}BC$,则 $PQ/\!/FE$,$PQ=FE$,故四边形 $EFPQ$ 是平行四边形,所以 $FP/\!/EQ$. 又 $FP\not\subset$ 平面 A_1BE,$EQ\subset$平面 A_1BE,所以 $FP/\!/$平面 A_1BE.



(2)取 EF 的中点 O,BC 的中点 G,连接 A_1O,OG,由平面 $A_1EF\perp$平面 $EFCB$,平面 $A_1EF\cap$平面 $EFCB=EF$,$A_1O\subset$平面 A_1EF,且 $A_1O\perp EF$,得 $A_1O\perp$平面 $EFCB$. 又易知 $OG\perp EF$,所以 OA_1,OE,OG 两两垂直. 以 O 为原点,OE,OG,OA_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $B(2,\sqrt{3},0)$,$A_1(0,0,\sqrt{3})$,$F(-1,0,0)$,$P\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,则$\overrightarrow{FP}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{FB}=(3,\sqrt{3},0)$. 设平面 BFP 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FB}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\ 3x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$取 $x=1$,则 $y=-\sqrt{3}$,$z=\sqrt{3}$,所以 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

又 $\overrightarrow{A_1F}=(-1,0,-\sqrt{3})$,所以$|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{A_1F}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1F}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{A_1F}|}=\frac{|-1-3|}{\sqrt{7}\times\sqrt{4}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$,所以直线 A_1F 与平面 BFP 所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

训练 60 三角+数列+立体几何+圆锥曲线

1. **解**:(1)由题意可得 $b=\frac{17\sin A-2c(\sin C+\sin B)}{\sin A+2\sin B}=\frac{(2a+b)\sin A-2c(\sin C+\sin B)}{\sin A+2\sin B}$,

所以$(2a+b)\sin A-2c(\sin C+\sin B)=b(\sin A+2\sin B)$.

由正弦定理得$(2a+b)a-2c(c+b)=b(a+2b)$,

则 $b^2+c^2-a^2=-bc$,所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$.

又 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

(2)因为$\triangle ABC$ 的周长为 15,所以 $a+b+c=15$. 由$\begin{cases}a+b+c=15,\\ 2a+b=17,\end{cases}$得 $c=a-2$. 因为 $b^2+c^2-a^2=-bc$,所以$(17-2a)^2+(a-2)^2-a^2=-(17-2a)(a-2)$,

即 $2a^2-51a+259=0$,解得 $a=7$ 或 $a=\frac{37}{2}$.

因为 $b=17-2a>0$,$c=a-2>0$,所以 $2<a<\frac{17}{2}$,

所以 $a=7$,则 $c=5$,$b=3$,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 3\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

2. **解**:(1)选①:由$(a_n+1)^2=a_{n-1}^2+4a_n+2a_{n-1}+1(n\geqslant 2)$,可得$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0(n\geqslant 2)$,因为 $a_n>0$,所以 $a_n-a_{n-1}=2(n\geqslant 2)$,所以数列$\{a_n\}$是以 1 为首项,2 为公差的等差数列,所以 $a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$.

选②:由 $na_{n+1}=(n+1)a_n+1$,得 $na_{n+1}+n=(n+1)a_n+(n+1)$,即 $n(a_{n+1}+1)=(n+1)(a_n+1)$,所以$\frac{a_{n+1}+1}{n+1}=\frac{a_n+1}{n}$,

所以数列$\left\{\frac{a_n+1}{n}\right\}$是常数列,所以$\frac{a_n+1}{n}=\frac{a_1+1}{1}=2$,所以 $a_n=2n-1$.

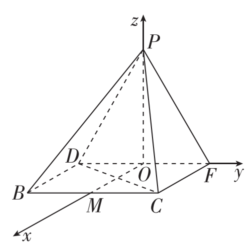
选③:由$\frac{nS_{n+1}}{S_n+n}=n+1$,得 $nS_{n+1}-(n+1)S_n=n(n+1)$,则$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=1$,所以数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是首项为 1,公差为 1 的等差数列,所以$\frac{S_n}{n}=1+(n-1)\times 1=n$,所以 $S_n=n^2$. 当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$,易知 $a_1=1$ 也满足上式,所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-1$.

(2)由(1)可得 $b_n=\frac{2}{a_na_{n+1}}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$,则 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$.

3. **解**:(1)证明:在平行四边形 $ABCD$ 中,$\because AD\perp BD$,$AD=2BD=4$,

$\therefore BC=4$,$DC=2\sqrt{5}$.

在三棱锥 P-BCD 中,$\because PC=6$,$PD=4$,$\therefore PD^2+DC^2=16+20=36=PC^2$,$\therefore PD\perp DC$,又 $PD\perp BD$,$BD\cap DC=D$,$BD,DC\subset$平面 BDC,$\therefore PD\perp$平面 BDC,又 $BC\subset$平面 BDC,$\therefore PD\perp BC$.



(2)如图,过点 D 作 $DF/\!/BC$,使 $DF=BC$,连接 PF,CF,则四边形 $BCFD$ 为平行四边形,

$\because DB\perp BC$,$\therefore BD\perp DF$.

由题意可知,$BD\perp PD$,$BD\perp DF$,$\because PD\cap DF=D$,$PD,DF\subset$平面 PDF,$\therefore BD\perp$平面 PDF,又 $PF\subset$平面 PDF,$\therefore BD\perp PF$,$\therefore CF\perp PF$,$\therefore PF=\sqrt{PC^2-CF^2}=\sqrt{20-4}=4$,又 $PD=DF=4$,$\therefore\triangle PDF$ 为等边三角形. $\because BD\perp$平面 PDF,$BD\subset$平面 $BCFD$,$\therefore$平面 $BCFD\perp$平面 PDF,取 DF 的中点 O,连接 PO,则 $PO\perp DF$,且 $PO=2\sqrt{3}$,又平面

$BCFD\perp$平面 PDF，$PO\subset$平面 PDF，平面 $BCFD\cap$平面 $PDF=DF$，∴$PO\perp$平面 $BCFD$，过点 O 作 $OM/\!/BD$，交 BC 于点 M，则 OM,OF,OP 两两垂直，以 O 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系.

由题可得 $P(0,0,2\sqrt{3})$，$B(2,-2,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,-2,0)$，∴$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DC}=(2,4,0)$，$\overrightarrow{BC}=(0,4,0)$. 设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，平面 PDC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x',y',z')$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x+2y-2\sqrt{3}z=0,\\ 4y=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},0,1)$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x'+2y'-2\sqrt{3}z'=0,\\ 2x'+4y'=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(2\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$，∴ $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|\sqrt{3}\times2\sqrt{3}-0+1|}{\sqrt{3+1}\times\sqrt{12+3+1}}=\dfrac{7}{8}$，

∴平面 PDC 与平面 PBC 的夹角的余弦值为 $\dfrac{7}{8}$.

4. **解**：(1)由 $\sqrt{3}|PF_1|=\sqrt{7}|PF_2|$，可设 $|PF_1|=\sqrt{7}x$，$|PF_2|=\sqrt{3}x$，

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

∴$|F_1F_2|^2=7x^2+3x^2-2\sqrt{7}x\cdot\sqrt{3}x\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{7}=4x^2$，即 $|F_1F_2|=2x$，

∴$|PF_1|^2=|PF_2|^2+|F_1F_2|^2$，∴$PF_2\perp F_1F_2$.

设 O 为坐标原点，在 $\triangle OPF_2$ 中，$PF_2\perp OF_2$，$|PF_2|=\sqrt{3}x$，$|OF_2|=x$，则 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{|PF_2|}{|OF_2|}=\sqrt{3}$，

∴双曲线的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$.

(2)由(1)知 $\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，且实轴长为 2，∴$a=1$，$b=\sqrt{3}$，

∴双曲线 E 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

由 $F_2(2,0)$，得直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$，

将 $y=k(x-2)$ 代入 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，可得 $(3-k^2)x^2+4k^2x-4k^2-3=0$，

∵直线 l 与双曲线右支交于不同两点，∴$\begin{cases}\Delta=36(k^2+1)>0,\\ \dfrac{-4k^2}{3-k^2}>0,\\ \dfrac{-4k^2-3}{3-k^2}>0,\end{cases}$

解得 $k^2>3$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{k^2-3}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2+3}{k^2-3}$，∴ $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2k^2}{k^2-3}$，

$\dfrac{y_1+y_2}{2}=k\left(\dfrac{2k^2}{k^2-3}-2\right)=\dfrac{6k}{k^2-3}$，

即 AB 的中点坐标为 $\left(\dfrac{2k^2}{k^2-3},\dfrac{6k}{k^2-3}\right)$.

∵Q 为 x 轴上一点且满足 $|QA|=|QB|$，∴Q 为 AB 的垂直平分线与 x 轴的交点.

AB 的垂直平分线的方程为 $y-\dfrac{6k}{k^2-3}=-\dfrac{1}{k}\left(x-\dfrac{2k^2}{k^2-3}\right)$，

令 $y=0$，得 $x=\dfrac{8k^2}{k^2-3}$，即 $Q\left(\dfrac{8k^2}{k^2-3},0\right)$，

∴$|QF_2|=\left|\dfrac{8k^2}{k^2-3}-2\right|=\dfrac{6(k^2+1)}{k^2-3}$.

∵A,B 在双曲线的右支上，∴$|AF_1|-|AF_2|=2a=2$，$|BF_1|-|BF_2|=2$，∴$|AF_1|+|BF_1|-|AF_2|-|BF_2|=4$，即 $|AF_1|+|BF_1|-4=|AB|$，

又 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{4k^2}{k^2-3}\right)^2-4\times\dfrac{4k^2+3}{k^2-3}}=\dfrac{6(k^2+1)}{k^2-3}$，

故 $\dfrac{2|QF_2|}{|AF_1|+|BF_1|-4}=\dfrac{2|QF_2|}{|AB|}=\dfrac{2\times\dfrac{6(k^2+1)}{k^2-3}}{\dfrac{6(k^2+1)}{k^2-3}}=2$，即 $\dfrac{2|QF_2|}{|AF_1|+|BF_1|-4}$ 为定值 2.

训练 61　数列＋概率统计＋立体几何＋函数与导数

1. **解**：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由题知 $q\neq1$，因为 $a_5-a_1=30$，$S_4=30$，所以 $a_1(q^4-1)=30$，$\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=30$，解得 $q=2$，$a_1=2$，所以 $a_n=2^n$.

(2)由(1)知 $b_n=\log_2a_{2n+1}=\log_2 2^{2n+1}=2n+1$，所以 $\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)$，所以 $T_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n+3}\right)=\dfrac{n}{3(2n+3)}$.

2. **解**：(1)由题可知这 8 家乡村民宿中普通型民宿的房间不低于 10 间的有 6 家，品质型民宿和普通型民宿的房间均不低于 10 间的有 4 家.

记"抽取的这 3 家的普通型民宿的房间均不低于 10 间"为事件 A，"抽取的这 3 家的品质型民宿的房间均不低于 10 间"为事件 B，

则 $P(A)=\dfrac{C_6^3}{C_8^3}=\dfrac{5}{14}$，$P(AB)=\dfrac{C_4^3}{C_8^3}=\dfrac{1}{14}$，所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{5}$.

(2)这 8 家乡村民宿中普通型民宿的房间不低于 15 间的有 3 家，故 X 的所有可能取值为 0，1，2，3，

$P(X=0)=\dfrac{C_3^0\cdot C_5^4}{C_8^4}=\dfrac{5}{70}=\dfrac{1}{14}$，$P(X=1)=\dfrac{C_3^1\cdot C_5^3}{C_8^4}=\dfrac{30}{70}=\dfrac{3}{7}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_3^2\cdot C_5^2}{C_8^4}=\dfrac{30}{70}=\dfrac{3}{7}$，$P(X=3)=\dfrac{C_3^3\cdot C_5^1}{C_8^4}=\dfrac{5}{70}=\dfrac{1}{14}$，

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

所以 $E(X)=0\times\dfrac{1}{14}+1\times\dfrac{3}{7}+2\times\dfrac{3}{7}+3\times\dfrac{1}{14}=\dfrac{3}{2}$.

3. **解**：(1)证明：因为 $AD/\!/BC$，且 $AD=\dfrac{1}{2}BC$，M 为 BC 的中点，所以 $BM/\!/AD$，且 $BM=AD$，所以四边形 $ABMD$ 是平行四边形，所以 $AB/\!/DM$，

因为 $\angle BAD=90^\circ$，所以 $AD\perp DM$，又 $AP\perp$平面 $ABCD$，$DM\subset$平面 $ABCD$，

所以 $AP\perp DM$，又 $AD\cap AP=A$，所以 $DM\perp$平面 PAD，又 $AN\subset$平面 PAD，

所以 $DM\perp AN$. 因为 $AP=AD$，N 是 PD 的中点，

所以 $PD\perp AN$，又 $DM\cap PD=D$，$PD,DM\subset$平面 PDM，

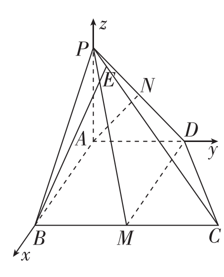
所以 $AN\perp$平面 PDM.

(2)以 A 为原点，AB,AD,AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,1,0)$，$P(0,0,1)$，$M(2,1,0)$.

$\overrightarrow{PD}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{DM}=(2,0,0)$，设平面 PDM 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y-z=0,\\ 2x=0,\end{cases}$ 取 $y=1$，则 $z=1$，$x=0$，

则 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$.



$\overrightarrow{PD}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{DC}=(2,1,0)$，设平面 PDC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}b-c=0,\\ 2a+b=0,\end{cases}$ 取 $b=2$，

则 $a=-1$，$c=2$，则 $\boldsymbol{n}=(-1,2,2)$.

设平面 PDM 与平面 PDC 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=$

$\frac{4}{\sqrt{2}\times 3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{3}$，所以平面 PDM 与平面 PDC 夹角的正弦值为 $\frac{1}{3}$.

(3)假设存在点 E，设 $\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PC}(0<\lambda<1)$，由(2)知 $\overrightarrow{BP}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{PC}=(2,2,-1)$，所以 $\overrightarrow{PE}=(2\lambda,2\lambda,-\lambda)$，
则 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PE}=(2\lambda-2,2\lambda,1-\lambda)$. 设直线 BE 与平面 PDC 所成的角为 φ，
由(2)知平面 PDC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(-1,2,2)$，
则 $\sin\varphi=|\cos\langle\overrightarrow{BE},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BE}||\boldsymbol{n}|}=\frac{4}{\sqrt{9\lambda^2-10\lambda+5}\times\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$，
化简得 $9\lambda^2-10\lambda+1=0$，即 $(9\lambda-1)(\lambda-1)=0$，
因为 $0<\lambda<1$，所以 $\lambda=\frac{1}{9}$，故 $\overrightarrow{PE}=\frac{1}{9}\overrightarrow{PC}$.
因为 $\overrightarrow{PC}=(2,2,-1)$，所以 $|\overrightarrow{PC}|=3$，
所以 $|\overrightarrow{PE}|=\frac{1}{9}|\overrightarrow{PC}|=\frac{1}{9}\times 3=\frac{1}{3}$，所以存在点 E 满足条件，且 PE 的长为 $\frac{1}{3}$.

4. **解**：(1) $g(x)=x-f(x)=x-\frac{ax}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{e^x-a+ax}{e^x}$，因为 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\frac{e^x-a+ax}{e^x}\geqslant 0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.
设 $m(x)=e^x-a+ax(x>0)$，则 $m'(x)=e^x+a$，
当 $a\geqslant -1$ 时，$m'(x)>0$，则 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，
所以 $m(x)>m(0)=1-a$，所以 $1-a\geqslant 0$，解得 $a\leqslant 1$，
所以 $-1\leqslant a\leqslant 1$.
当 $a<-1$ 时，令 $m'(x)=0$，则 $x=\ln(-a)>0$，
则当 $x\in(0,\ln(-a))$ 时，$m'(x)<0$，$m(x)$ 单调递减，
当 $x\in(\ln(-a),+\infty)$ 时，$m'(x)>0$，$m(x)$ 单调递增，
所以 $m(x)_{\min}=m[\ln(-a)]=a\ln(-a)-2a$，
由 $m(x)_{\min}\geqslant 0$，得 $a\geqslant -e^2$，所以 $-e^2\leqslant a<-1$.
综上，a 的取值范围为 $[-e^2,1]$.

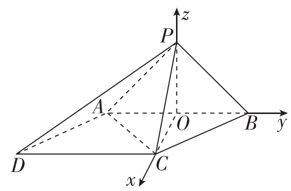
(2)证明：由题意可知 $h(x)=f(x)-\ln x=\frac{ax}{e^x}-\ln x$，则 $h'(x)=\frac{a(1-x)}{e^x}-\frac{1}{x}(x>0)$.
若 $a>0$，则当 $x\in(0,1)$ 时，$h(x)>0$，当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，且 $e^a>1$，
又 $h(1)=\frac{a}{e}>0$，$h(e^a)<0$，所以当 $a>0$ 时，$h(x)$ 有且只有一个零点.
若 $a=0$，则由 $h(x)=0$，可得 $-\ln x=0$，即 $x=1$，故 $h(x)$ 有且只有一个零点.
若 $a<0$，则当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)<0$，当 $x\in(0,1]$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，且 $e^a\in(0,1)$，又 $h(1)=\frac{a}{e}<0$，$h(e^a)>0$，所以当 $a<0$ 时，$h(x)$ 有且只有一个零点.
综上，对任意实数 a，$h(x)$ 有且只有一个零点.

训练 62　三角＋立体几何＋函数与导数＋圆锥曲线

1. **解**：(1)证明：因为 $a-3b+6b\sin^2\frac{A+B}{2}=0$，所以 $a-3b+6b\sin^2\frac{\pi-C}{2}=a-3b+6b\cos^2\frac{C}{2}=0$，所以 $a-3b+6b\cdot\frac{1+\cos C}{2}=0$，所以 $a+3b\cos C=0$.

(2)由(1)及正弦定理可得，$\sin A+3\sin B\cos C=0$，所以 $4\sin B\cos C+\cos B\sin C=0$，由 $a+3b\cos C=0$，可知 $\cos C<0$，所以 $\frac{\pi}{2}<C<\pi$，$0<B<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos B\cos C\neq 0$，所以 $4\tan B+\tan C=0$. 由 $0<B<\frac{\pi}{2}$，得 $\tan B>0$，所以 $\tan A=-\tan(B+C)=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=\frac{3\tan B}{4\tan^2 B+1}=\frac{3}{4\tan B+\frac{1}{\tan B}}\leqslant\frac{3}{2\sqrt{4\tan B\times\frac{1}{\tan B}}}=\frac{3}{4}$，当且仅当 $4\tan B=\frac{1}{\tan B}$，即 $\tan B=\frac{1}{2}$ 时取等号，故 $\tan A$ 的最大值为 $\frac{3}{4}$.

2. **解**：(1)证明：如图，取 AB 的中点 O，连接 CO，PO，
由四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，可得 $AB=BC=2$，
又 $\angle ABC=60^\circ$，所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形，
所以 $CO\perp AB$，$OC=\sqrt{3}$.
由 $PA\perp PB$，可得 $OP=\frac{1}{2}AB=1$，又 $PC=2$，



所以 $OP^2+OC^2=1^2+(\sqrt{3})^2=2^2=PC^2$，所以 $CO\perp OP$.
因为 $AB\cap OP=O$，$AB\subset$ 平面 PAB，$OP\subset$ 平面 PAB，
所以 $CO\perp$ 平面 PAB，又 $OC\subset$ 平面 $ABCD$，
所以平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$.
(2)由 $PA=PB$，可得 $PO\perp AB$，
又平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$PO\subset$ 平面 PAB，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，
所以直线 OC，OB，OP 两两垂直.
以 O 为坐标原点，OC，OB，OP 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，
则 $A(0,-1,0)$，$P(0,0,1)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$D(\sqrt{3},-2,0)$，
所以 $\overrightarrow{PC}=(\sqrt{3},0,-1)$，$\overrightarrow{AP}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$.
设平面 APC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，
由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y_1+z_1=0,\\ \sqrt{3}x_1-z_1=0,\end{cases}$ 取 $z_1=\sqrt{3}$，可得 $\boldsymbol{n}_1=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$，
由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2y_2=0,\\ \sqrt{3}x_2-z_2=0,\end{cases}$ 取 $x_2=\sqrt{3}$，可得 $\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},0,3)$. 设平面 APC 与平面 PCD 的夹角为 θ，
则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times\sqrt{12}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，
所以平面 APC 与平面 PCD 的夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

3. **解**：(1)函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，
当 $a=1$ 时，$f(x)=2x-\ln x$，则 $f'(x)=2-\frac{1}{x}$.
令 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{2}$，所以函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增；
令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\frac{1}{2}$，所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减.
故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，单调递减区间为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.
(2) $f(x)\geqslant(a+2)x-xe^x$ 恒成立等价于 $xe^x-a\ln(xe^x)\geqslant 0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，令 $t=xe^x(x>0)$，
则 $t>0$，所以 $t-a\ln t\geqslant 0$ 对任意 $t\in(0,+\infty)$ 恒成立.
令 $h(t)=t-a\ln t(t>0)$，则 $h(t)\geqslant 0$ 恒成立.
①若 $a=0$，则 $h(t)=t>0$，满足题意；
②若 $a<0$，则 $0<e^{\frac{1}{a}}<1$，所以 $h(e^{\frac{1}{a}})=e^{\frac{1}{a}}-a\ln e^{\frac{1}{a}}=e^{\frac{1}{a}}-1<0$，不满足题意；
③若 $a>0$，则 $h'(t)=1-\frac{a}{t}$，令 $h'(t)=0$，得 $t=a$，当 $t\in(0,a)$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 单调递减，当 $t\in(a,+\infty)$ 时，$h'(t)>0$，$h(t)$ 单调递增，
所以 $h(t)$ 在 $t=a$ 处取得最小值 $h(a)=a(1-\ln a)$，
要使得 $h(t)\geqslant 0$ 恒成立，只需 $h(a)=a(1-\ln a)\geqslant 0$，
可得 $0<a\leqslant e$.
综上，实数 a 的取值范围是 $[0,e]$.

4. **解**：(1)设椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的半焦距为 c，
由题意可知，$2c=4$，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $c=2$，$a=\sqrt{6}$，
所以 $b^2=a^2-c^2=6-4=2$，

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)由题意可知,两条切线的斜率均存在,

设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm\sqrt{6})$,过点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$,由 $\begin{cases}y-y_0=k(x-x_0),\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$

消去 y 可得 $(1+3k^2)x^2+6k(y_0-kx_0)x+3(y_0-kx_0)^2-6=0$,

则 $\Delta=36k^2(y_0-kx_0)^2-4(1+3k^2)[3(y_0-kx_0)^2-6]=0$,

化简并整理得 $(x_0^2-6)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-2=0$,

因为两条切线的斜率分别为 k_1,k_2,

所以 $k_1k_2=\frac{y_0^2-2}{x_0^2-6}=m$,即 $y_0^2=mx_0^2-6m+2$,

所以 $x_0^2+y_0^2=(m+1)x_0^2-6m+2$.

易知 $F(2,0)$,所以 $|PF|=\sqrt{(x_0-2)^2+y_0^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2-4x_0+4}=\sqrt{(m+1)x_0^2-4x_0-6m+6}$,

因为 $|m|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $m+1>0$,

所以当 $x_0=\frac{2}{m+1}$ 时,$|PF|$ 取得最小值,最小值为 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6-\left[3(m+1)+\frac{2}{m+1}\right]}$,

所以 $t=\sqrt{2}\cdot\sqrt{6-\left[3(m+1)+\frac{2}{m+1}\right]}\leqslant\sqrt{2}\times\sqrt{6-2\sqrt{6}}=2\sqrt{3-\sqrt{6}}$,当且仅当 $3(m+1)=\frac{2}{m+1}$,即 $m=-1+\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时,等号成立,所以 t 的最大值为 $2\sqrt{3-\sqrt{6}}$.

训练 63　数列＋三角＋圆锥曲线＋概率统计

1. **解**:(1)由题意得 $(a_1+d)(a_1+13d)=(a_1+4d)^2$,

整理得 $2a_1d=d^2$,

$\because a_1=1,d>0,\therefore d=2,\therefore a_n=2n-1$.

(2)$b_n=\frac{1}{n(a_n+3)}=\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

$\therefore S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{2(n+1)}$.

假设存在整数 t,使得 $S_n>\frac{t}{36}$ 恒成立,

$\because S_{n+1}-S_n=\frac{n+1}{2(n+2)}-\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2(n+2)(n+1)}>0$,

$\therefore$ 数列 $\{S_n\}$ 是递增数列,

$\therefore S_1=\frac{1}{4}$ 为 S_n 的最小值,$\therefore\frac{t}{36}<\frac{1}{4}$,即 $t<9$,

又 t 为整数,$\therefore t$ 的最大值为 8.

2. **解**:(1)因为 $\frac{\sin B-\sin A}{\sin B-\sin C}=\frac{c}{a+b}$,

所以由正弦定理得 $\frac{b-a}{b-c}=\frac{c}{a+b}$,即 $b^2+c^2-a^2=bc$.

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$,

因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=0$,所以 $PB\perp PC$,在 $\triangle PBC$ 中,$PC=BC\cos(C-\theta)$.

在 $\triangle APC$ 中,由正弦定理得 $\frac{PC}{\sin\angle PAC}=\frac{AC}{\sin\angle APC}$,

即 $\frac{BC\cos(C-\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{3}{\sin\frac{2\pi}{3}}=2\sqrt{3}$,所以 $BC\cos(C-\theta)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$(＊).

在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理得 $BC=\sqrt{2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{7}$,所以由余弦定理得 $\cos C=\frac{(\sqrt{7})^2+3^2-2^2}{2\times3\times\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$,

所以 $\sin C=\frac{\sqrt{21}}{7}$,

代入(＊)式得 $2\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=3\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$,

即 $\cos\theta=2\sqrt{3}\sin\theta$,所以 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

3. **解**:(1)因为直线 AB_1 的方程为 $x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$,所以 $A(-\sqrt{3},0)$,$B_1(0,1)$,即 $a=\sqrt{3}$,$b=1$,所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}$,

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$,离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(2)依题意,设 $P(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$,则 $M(x_0,-y_0)$,

由点 P 是椭圆上一点,可得 $\frac{x_0^2}{3}+y_0^2=1$. 直线 AB_1 的方程可化为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$,由 $\frac{\sqrt{3}}{3}x+1=y_0$,可得 $x=\sqrt{3}(y_0-1)$,所以 $Q(\sqrt{3}(y_0-1),y_0)$. 易知 $B_2(0,-1)$,可得直线 PB_2 的方程为 $y=\frac{y_0+1}{x_0}x-1$,令 $x=\sqrt{3}(y_0-1)$,得 $y=\frac{y_0+1}{x_0}\times\sqrt{3}(y_0-1)-1=\frac{\sqrt{3}(y_0^2-1)}{x_0}-1=\frac{\sqrt{3}\left(-\frac{x_0^2}{3}\right)}{x_0}-1=-\frac{\sqrt{3}x_0}{3}-1$,即 $N\left(\sqrt{3}(y_0-1),-\frac{\sqrt{3}x_0}{3}-1\right)$,所以 $k_{MN}=\frac{-y_0+\frac{\sqrt{3}x_0}{3}+1}{x_0-\sqrt{3}(y_0-1)}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{x_0-\sqrt{3}y_0+\sqrt{3}}{x_0-\sqrt{3}y_0+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以直线 MN 的倾斜角是 $\frac{\pi}{6}$,故 $\angle MNQ=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

4. **解**:(1)由题意可知,第一轮队伍 A 和队伍 D 对阵,则获胜队伍需要赢得比赛 3 的胜利,失败队伍需要赢得比赛 4 和比赛 5 的胜利,他们才能在决赛中对阵,

所以所求的概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

(2)设 W_i 表示队伍 B 在比赛 i 中胜利,L_i 表示队伍 B 在比赛 i 中失败,设事件 E 为"队伍 B 获得亚军",事件 F 为"队伍 B 在所参加的所有比赛中败了两场",则事件 F 包括 L_2L_4,$L_2W_4L_5$,$W_2L_3L_5$,$W_2L_3W_5L_6$,$L_2W_4W_5L_6$,

所以 $P(F)=P(L_2L_4)+P(L_2W_4L_5)+P(W_2L_3L_5)+P(W_2L_3W_5L_6)+P(L_2W_4W_5L_6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$,事件 EF 包括 $W_2L_3W_5L_6$,$L_2W_4W_5L_6$,所以 $P(EF)=P(W_2L_3W_5L_6)+P(L_2W_4W_5L_6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$,所以所求事件的概率 $P(E|F)=\frac{P(EF)}{P(F)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{8}}=\frac{1}{5}$.

训练 64　数列＋三角＋圆锥曲线＋立体几何

1. **解**:(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,由题意知 $\begin{cases}d\neq0,\\5a_1+10d=20,\\(a_1+2d)^2=(a_1+d)(a_1+4d),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=0,\\d=2,\end{cases}$ 所以 $a_n=2n-2$.

(2)因为 $b_n+b_{n+1}=2^{n-1}$①,

所以 $b_1+b_2=1$,又因为 $b_1=1$,所以 $b_2=0$.

当 $n\geqslant2$ 时,$b_{n-1}+b_n=2^{n-2}$②,

由①－②得 $b_{n+1}-b_{n-1}=2^{n-2}(n\geqslant2)$,

即 $b_n-b_{n-2}=2^{n-3}(n\geqslant3)$,

所以 $b_{2n}-b_{2n-2}=2^{2n-3}(n\geqslant2)$,$b_{2n-2}-b_{2n-4}=2^{2n-5}$,…,$b_4-b_2=2^1$,累加得 $b_{2n}-b_2=2^{2n-3}+2^{2n-5}+\cdots+2^1=\frac{2}{3}(4^{n-1}-1)(n\geqslant2)$,

所以 $b_{2n}=\frac{2}{3}(4^{n-1}-1)(n\geqslant2)$,

又 $b_2=0$ 满足上式，所以 $b_{2n}=\frac{2}{3}(4^{n-1}-1)$，

所以数列$\{b_{2n}\}$的前 n 项和为 $b_2+b_4+\cdots+b_{2n}=\frac{2}{3}(4^0+4^1+\cdots+4^{n-1}-n)=\frac{2}{3}\times\frac{1-4^n}{1-4}-\frac{2n}{3}=\frac{2}{9}\cdot 4^n-\frac{2n}{3}-\frac{2}{9}$.

2. 解：(1)函数 $f(x)$同时满足①③.

由①知 $A=2$，由③知$\frac{T}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{4}$，则 $\omega=2$，

故 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2)由 $f(B)=1$ 得 $\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $2B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right)$，所以 $2B+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，故 $B=\frac{\pi}{3}$.

设线段 CD 的中点为 E，连接 AE，因为 $AD=AC=b$，所以 $AE\perp CD$.

因为 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{BE}{AB}$，$BE=\frac{3}{4}a$，所以$\frac{3a}{4c}=\frac{1}{2}$，即$\frac{a}{c}=\frac{2}{3}$.

由正弦定理知$\frac{\sin\angle BAC}{\sin C}=\frac{a}{c}=\frac{2}{3}$.

3. 解：(1)当直线 AB 与 x 轴垂直时，设其方程为 $x=t(-\sqrt{2}<t<\sqrt{2})$.

因为点 A,B 关于 x 轴对称，且 $OA\perp OB$，所以可设 $A(t,t)$，将点 A 的坐标代入椭圆 C 的方程，得 $t^2+2t^2=2$，解得 $t=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以直线 AB 的方程为 $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(2)当直线 AB 的斜率不存在时，由(1)知$\frac{|ON|}{|OM|}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\sqrt{3}$.

当直线 AB 的斜率存在时，设其方程为 $y=kx+m$.

由$\begin{cases}y=kx+m,\\x^2+2y^2=2,\end{cases}$得$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$.

由 $\Delta=8(2k^2-m^2+1)>0$，得 $m^2<1+2k^2$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{2k^2+1}$.

因为 $OA\perp OB$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，

所以 $x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$，

整理得$(k^2+1)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$，

所以$(k^2+1)(2m^2-2)+km\cdot(-4km)+m^2(2k^2+1)=0$，

即 $3m^2=2k^2+2$，又 $k^2\geqslant 0$，所以 $m^2\geqslant\frac{2}{3}$.

设 $\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OM}$，其中 $\lambda>0$，则 $\overrightarrow{ON}=\frac{\lambda}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{\lambda}{2}(x_1+x_2,y_1+y_2)=\left(\frac{-2km\lambda}{2k^2+1},\frac{m\lambda}{2k^2+1}\right)$，

则 $N\left(\frac{-2km\lambda}{2k^2+1},\frac{m\lambda}{2k^2+1}\right)$，将点 N 的坐标代入椭圆 C 的方程，

整理得 $m^2\lambda^2=2k^2+1$，所以 $m^2\lambda^2=3m^2-1$，即 $\lambda^2=3-\frac{1}{m^2}$.

因为 $m^2\geqslant\frac{2}{3}$，所以$\frac{3}{2}\leqslant\lambda^2<3$，即$\frac{\sqrt{6}}{2}\leqslant\lambda<\sqrt{3}$.

综上，$\frac{|ON|}{|OM|}$的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{3}\right]$.

4. 解：(1)在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$A_1B_1=AB=2\sqrt{2}$，

又因为 $AC=BC=2$，所以 $AC^2+BC^2=AB^2$，所以 $AC\perp BC$.

因为三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $CC_1\perp$平面 ABC.

因为 $BC\subset$平面 ABC，$AC\subset$平面 ABC，

所以 $CC_1\perp BC$，$CC_1\perp AC$.

因为 $CC_1\cap AC=C$，CC_1，$AC\subset$平面 ACC_1A_1，

所以 $BC\perp$平面 ACC_1A_1，

所以 $V_{B\text{-}A_1C_1CA}=\frac{1}{3}S_{矩形A_1C_1CA}\times BC=\frac{1}{3}\times 4\times 2\times 2=\frac{16}{3}$.

(2)取 A_1B_1 的中点 E，连接 AE，C_1E，

因为 $AC=BC$，所以 $A_1C_1=B_1C_1$，所以 $C_1E\perp A_1B_1$.

因为三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $AA_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$，又 $C_1E\subset$平面 $A_1B_1C_1$，所以 $AA_1\perp C_1E$，

又 $AA_1\cap A_1B_1=A_1$，AA_1，$A_1B_1\subset$平面 ABB_1A_1，

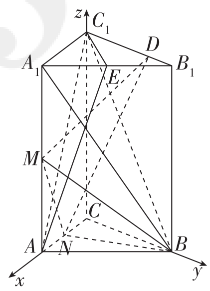
所以 $C_1E\perp$平面 ABB_1A_1，

所以$\angle C_1AE$ 为直线 AC_1 与平面 ABB_1A_1 所成的角，则$\angle C_1AE=30^\circ$.

在等腰直角三角形 $A_1B_1C_1$ 中，$C_1E=\frac{1}{2}A_1B_1=\sqrt{2}$，

所以 $AC_1=2C_1E=2\sqrt{2}$，所以 $AA_1=\sqrt{AC_1^2-A_1C_1^2}=2$.

由题意知 CC_1，AC，BC 两两垂直.



以 C 为原点，以 CA，CB，CC_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，所以 $B(0,2,0)$，$M(2,0,1)$，$N(1,0,0)$，

设 $D(0,\lambda,2)(0\leqslant\lambda\leqslant 2)$，

则 $\overrightarrow{BM}=(2,-2,1)$，$\overrightarrow{MN}=(-1,0,-1)$，$\overrightarrow{DN}=(1,-\lambda,-2)$.

设平面 BMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x',y',z')$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x'-2y'+z'=0,\\-x'-z'=0,\end{cases}$

令 $z'=2$，得 $x'=-2$，$y'=-1$，则 $\boldsymbol{n}=(-2,-1,2)$.

设平面 DMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_0,y_0,z_0)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{DN}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x_0-\lambda y_0-2z_0=0,\\-x_0-z_0=0.\end{cases}$

设平面 DMN 与平面 BMN 的夹角为 θ，$0^\circ\leqslant\theta\leqslant 90^\circ$.

①当 $\lambda=0$ 时，点 D 与点 C_1 重合，此时 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$是平面 DMN 的一个法向量，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

②当 $0<\lambda\leqslant 2$ 时，令 $z_0=1$，得 $x_0=-1$，$y_0=-\frac{3}{\lambda}$，$\therefore\boldsymbol{m}=\left(-1,-\frac{3}{\lambda},1\right)$，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{4+\frac{3}{\lambda}}{3\sqrt{2+\frac{9}{\lambda^2}}}(0<\lambda\leqslant 2)$，

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{4+\frac{3}{\lambda}}{3\sqrt{2+\frac{9}{\lambda^2}}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{2+\frac{24}{\lambda-6}+\frac{81}{(\lambda-6)^2}}}(0<\lambda\leqslant 2)$.

令 $t=\frac{1}{\lambda-6}(0<\lambda\leqslant 2)$，则 $t\in\left[-\frac{1}{4},-\frac{1}{6}\right)$，

则 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{81t^2+24t+2}}\geqslant\frac{4\sqrt{34}}{51}$，当 $t=-\frac{1}{4}$，即 $\lambda=2$ 时，等号成立，又$\frac{4\sqrt{34}}{51}<\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以当点 D 与点 B_1 重合时，平面 DMN 与平面 BMN 夹角的正弦值最小，最小值为$\frac{4\sqrt{34}}{51}$.

训练 65　概率统计＋数列＋立体几何＋函数与导数

1. 解：(1)由 $y=e^{\lambda x+t}$，得 $\ln y=\ln e^{\lambda x+t}=\lambda x+t$，又 $v=\ln y$，所

以 $v=\lambda x+t$，所以 v 关于 x 的样本相关系数 $r=$
$$\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(v_i-\overline{v})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(v_i-\overline{v})^2}}=\frac{18}{\sqrt{100}\times\sqrt{4}}=0.9.$$
(2) 由题意知 $\hat{\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(v_i-\overline{v})}{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{18}{100}=0.18$，则 $\hat{t}=\overline{v}-\hat{\lambda}\overline{x}=5.36-0.18\times 26=0.68$，所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=e^{0.18x+0.68}$.

2. **解**：因为 $S_{n+1}=S_n+a_n+1$，所以 $S_{n+1}-S_n=a_n+1$，即 $a_{n+1}=a_n+1$，所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列.

(1)选择条件①：由 $a_4+a_7=13$，得 $a_1+3+a_1+6=13$，解得 $a_1=2$，所以 $a_n=2+(n-1)\times 1=n+1$.

选择条件②：由 a_1,a_3,a_7 成等比数列，得 $(a_1+2)^2=a_1(a_1+6)$，解得 $a_1=2$，所以 $a_n=2+(n-1)\times 1=n+1$.

选择条件③：由 $S_{10}=10a_1+\frac{10\times 9}{2}\times 1=10a_1+45=65$，解得 $a_1=2$，所以 $a_n=2+(n-1)\times 1=n+1$.

(2)由(1)可知 $\frac{a_n}{2^n}=\frac{n+1}{2^n}$，则 $T_n=\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n+1}{2^n}$①，所以 $\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n+1}{2^{n+1}}$②，

①－②得 $\frac{1}{2}T_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}}$，故 $T_n=3-\frac{n+3}{2^n}$.

3. **解**：(1)证明：取 BC 的中点 O，连接 AO,DO,AD，如图，

$\because\triangle ABC$ 是正三角形，$\therefore OA\perp BC$，

又平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，平面 $ABC\cap$ 平面 $BCD=BC$，$OA\subset$ 平面 ABC，$\therefore OA\perp$ 平面 BCD，

又 $OD\subset$ 平面 BCD，$\therefore AO\perp OD$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$AO=DO=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，

$\therefore AD=\sqrt{3+3}=\sqrt{6}$，又 $AE=\sqrt{6}$，

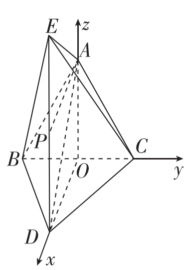
$\therefore\triangle ADE$ 为等腰三角形，

又 P 是 DE 的中点，$\therefore AP\perp DE$.

$\because DE\perp$ 平面 BCD，$\therefore AO\parallel DE$，在平面 $AODE$ 中，可得 $AP\perp AO$，$\therefore AP\parallel OD$.

又 $OD\subset$ 平面 BCD，$AP\not\subset$ 平面 BCD，

$\therefore AP\parallel$ 平面 BCD.



(2)由(1)知，$OA\parallel DP$，$AP\parallel OD$，

$\therefore$ 四边形 $APDO$ 为平行四边形，

$\therefore PD=OA=\sqrt{3}$，$\therefore DE=2\sqrt{3}$.

以 O 为坐标原点，以 $\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(0,0,\sqrt{3})$，$B(0,-1,0)$，$C(0,1,0)$，$E(\sqrt{3},0,2\sqrt{3})$，

$\therefore\overrightarrow{BA}=(0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(0,1,-\sqrt{3})$.

设平面 ABE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y+\sqrt{3}z=0,\\ \sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

令 $y=\sqrt{3}$，则 $x=1,z=-1$，可得 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},-1)$.

设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}a+\sqrt{3}c=0,\\ b-\sqrt{3}c=0.\end{cases}$

令 $a=-1$，则 $b=\sqrt{3}$，$c=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(-1,\sqrt{3},1)$，

$\therefore|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-1+3-1|}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{1}{5}$，

$\therefore\sin\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，

故平面 ABE 与平面 ACE 夹角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

4. **解**：(1)证明：由题意，得 $g'(x)=3x^2-a$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)\geqslant 0$ 恒成立，$g(x)=x^3-ax+\frac{1}{4}$ 没有极值. 当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$，即 $3x^2-a=0$，解得 $x'_1=-\frac{\sqrt{3a}}{3}$，$x'_2=\frac{\sqrt{3a}}{3}$.

当 $x\in(-\infty,x'_1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x'_1,x'_2)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x'_2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

所以 $g(x)$ 的极大值为 $g\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)=\frac{2a\sqrt{3a}}{9}+\frac{1}{4}$，

极小值为 $g\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)=\frac{-2a\sqrt{3a}}{9}+\frac{1}{4}$.

当 $x_0=\frac{\sqrt{3a}}{3}$ 时，要证 $x_1+2x_0=0$，即证 $x_1=-2x_0=\frac{-2\sqrt{3a}}{3}$，

代入计算，有 $g(x_0)=\frac{-2a\sqrt{3a}}{9}+\frac{1}{4}$，$g(x_1)=\frac{-2a\sqrt{3a}}{9}+\frac{1}{4}$，

则 $g(x_0)=g(x_1)$，符合题意，即 $x_1+2x_0=0$ 得证；

当 $x_0=-\frac{\sqrt{3a}}{3}$ 时，要证 $x_1+2x_0=0$，即证 $x_1=-2x_0=\frac{2\sqrt{3a}}{3}$，

代入计算，有 $g(x_0)=\frac{2a\sqrt{3a}}{9}+\frac{1}{4}$，$g(x_1)=\frac{2a\sqrt{3a}}{9}+\frac{1}{4}$，

则 $g(x_0)=g(x_1)$，符合题意，即 $x_1+2x_0=0$ 得证.

综上，当 x_0 为极大值点和极小值点时，$x_1+2x_0=0$ 均成立.

(2)①当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)=-\ln x<0$，所以 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}\leqslant f(x)<0$，

故函数 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内没有零点.

②当 $x=1$ 时，$f(1)=0$，$g(1)=\frac{5}{4}-a$，若 $a\leqslant\frac{5}{4}$，则 $g(1)\geqslant 0$，所以 $h(x)=f(1)=0$，

此时 $x=1$ 是函数 $h(x)$ 的一个零点；

若 $a>\frac{5}{4}$，则 $g(1)<0$，所以 $h(x)=g(x)<0$，此时 $x=1$ 不是函数 $h(x)$ 的一个零点.

③当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=-\ln x>0$，因此只需要考虑 $g(x)$，

由题意，$g(x)=x^3-ax+\frac{1}{4}$，$g'(x)=3x^2-a$.

(i)当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)>0$ 恒成立，

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$g(0)=\frac{1}{4}>0$，所以 $g(x)>0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，

即 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内没有零点，也即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 内没有零点.

(ii)当 $a\geqslant 3$ 时，$g'(x)<0$ 恒成立，

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，又 $g(1)=\frac{5}{4}-a<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内有 1 个零点，也即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 内有一个零点.

(iii)当 $a\in(0,3)$ 时，函数 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\sqrt{3a}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)=\frac{-2a\sqrt{3a}}{9}+\frac{1}{4}$.

若 $g\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)>0$,即 $0<a<\frac{3}{4}$,则 $g(x)$在$(0,1)$内没有零点,也即 $h(x)$在$(0,1)$内没有零点;

若 $g\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)=0$,即 $a=\frac{3}{4}$,则 $g(x)$在$(0,1)$内有唯一的一个零点,也即 $h(x)$在$(0,1)$内有唯一的一个零点;

若 $g\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)<0$,即$\frac{3}{4}<a<3$,则由 $g(0)=\frac{1}{4}>0$,$g(1)=\frac{5}{4}-a>0$,可得当$\frac{3}{4}<a<\frac{5}{4}$时,$g(x)$在$(0,1)$内有两个零点.综上所述,$a$ 的取值范围为$\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)$.

训练 66 概率统计+三角+函数与导数+圆锥曲线

1. **解**:(1)记事件 M 为"抽取到男同学和女同学各一位",事件 N 为"两位同学均选择 A 类项目",

则 $P(M)=\frac{C_{25+15}^{1}C_{10+a}^{1}}{C_{25+15+10+a}^{2}}=\frac{C_{40}^{1}C_{10+a}^{1}}{C_{50+a}^{2}}$,$P(MN)=\frac{C_{a}^{1}C_{25}^{1}}{C_{25+15+10+a}^{2}}=\frac{C_{a}^{1}C_{25}^{1}}{C_{50+a}^{2}}$,所以 $P(N|M)=\frac{P(MN)}{P(M)}=\frac{C_{a}^{1}C_{25}^{1}}{C_{40}^{1}C_{10+a}^{1}}=\frac{25a}{40(10+a)}=\frac{5}{16}$,解得 $a=10$.

(2)零假设为 H_0:该班级同学选择项目的类别与其性别无关联.

根据表中数据,得 $\chi^2=\frac{(25+15+10+10)\times(25\times10-15\times10)^2}{(25+15)\times(10+10)\times(25+10)\times(15+10)}=\frac{6}{7}\approx0.857<6.635=x_{0.01}$.根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,没有充分证据推断 H_0 不成立,因此可以认为 H_0 成立,即认为该班级同学选择项目的类别与其性别无关联.

2. **解**:(1)因为 $2b+\tan A=2\tan A\cos^2\frac{C}{2}+c$,

所以$(2b-c)\cos A=\left(2\cos^2\frac{C}{2}-1\right)\sin A$,

则$(2b-c)\cos A=\cos C\sin A$,

设$\triangle ABC$ 的外接圆的半径为R,则 $2R=1$,

所以 $b=2R\sin B=\sin B$,$c=2R\sin C=\sin C$,

所以 $2\sin B\cos A=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin(A+B)=\sin B$,

又 $B\in(0,\pi)$,所以 $\sin B>0$,所以 $\cos A=\frac{1}{2}$,

又 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,

所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$,则 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$,

设 D 为 BC 的中点,则 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$,所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,

所以 $S_{\triangle BCE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{6}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{12}bc$.

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,即$\frac{4}{9}=b^2+c^2-bc\geqslant bc$,当且仅当 $b=c$ 时,等号成立,所以 $S_{\triangle BCE}=\frac{\sqrt{3}}{12}bc\leqslant\frac{\sqrt{3}}{27}$,

故$\triangle BCE$ 面积的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{27}$.

3. **解**:(1)$\because f(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x-2ax$,

$\therefore f'(x)=x+\frac{1}{x}-2a=\frac{x^2-2ax+1}{x}$,$x\in(0,+\infty)$.

记 $g(x)=x^2-2ax+1$,当 $\Delta=4a^2-4\leqslant0$,即 $0<a\leqslant1$ 时,$g(x)=x^2-2ax+1\geqslant0$ 恒成立,

$\therefore f'(x)\geqslant0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立,故 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

当 $\Delta=4a^2-4>0$,即 $a>1$ 时,方程 $g(x)=0$ 有两个不等实根 x_1,x_2,且 $x_1=\frac{2a-\sqrt{4a^2-4}}{2}=a-\sqrt{a^2-1}>0$,$x_2=\frac{2a+\sqrt{4a^2-4}}{2}=a+\sqrt{a^2-1}>0$,$\therefore$ 当 $x\in(0,a-\sqrt{a^2-1})$时,$g(x)>0$,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,

当 $x\in(a-\sqrt{a^2-1},a+\sqrt{a^2-1})$时,$g(x)<0$,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,

当 $x\in(a+\sqrt{a^2-1},+\infty)$时,$g(x)>0$,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

综上所述,当 $0<a\leqslant1$ 时,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;

当 $a>1$ 时,$f(x)$在$(0,a-\sqrt{a^2-1})$和$(a+\sqrt{a^2-1},+\infty)$上单调递增,在$(a-\sqrt{a^2-1},a+\sqrt{a^2-1})$上单调递减.

(2)证明:$\because f(1)=\frac{1}{2}-2a$,$\therefore f(m)+f(n)=1-4a=2f(1)$.

由(1)可知,当 $0<a<1$ 时,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

故不妨设 $0<m<1<n$.

要证 $m+n>2$,只需证 $n>2-m>1$,只需证 $f(n)>f(2-m)$,只需证 $1-4a-f(m)>f(2-m)$,只需证 $f(m)+f(2-m)<1-4a$.

记 $F(x)=f(x)+f(2-x)$,$x\in(0,1)$,

则 $F'(x)=x+\frac{1}{x}-2a-(2-x)-\frac{1}{2-x}+2a=-\frac{2(x-1)^3}{x(2-x)}>0$ 恒成立,$\therefore F(x)$单调递增,

$\therefore F(x)<F(1)=2f(1)=1-4a$,$\therefore m+n>2$.

4. **解**:(1)设双曲线 C 的焦距为 $2c$,依题意可知 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,则$|MF_1|=\sqrt{(4+c)^2+(-2\sqrt{2}-0)^2}=\sqrt{(4+c)^2+8}$,

$|MF_2|=\sqrt{(4-c)^2+(-2\sqrt{2}-0)^2}=\sqrt{(4-c)^2+8}$,

又$|MF_1|\cdot|MF_2|=24$,所以 $\sqrt{(4+c)^2+8}\cdot\sqrt{(4-c)^2+8}=24$,

解得 $c^2=16$ 或 $c^2=0$(舍去),又 $c>0$,所以 $c=4$,则$|F_1F_2|=8$,

所以$\triangle MF_1F_2$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times8\times2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

(2)由题意可知$\begin{cases}\frac{16}{a^2}-\frac{8}{b^2}=1,\\a^2+b^2=16,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=8,\\b^2=8,\end{cases}$所以双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $B'(-x_2,-y_2)$,又 $N(3,1)$,所以 $k_1=\frac{y_1-1}{x_1-3}$,$k_2=\frac{-y_2-1}{-x_2-3}$.

设直线 l 的方程为 $y=-3x+m$,与双曲线 C 的方程联立,消去 y,得 $8x^2-6mx+m^2+8=0$,

由 $\Delta=(-6m)^2-32(m^2+8)>0$,得$|m|>8$.

由根与系数的关系得 $x_1+x_2=\frac{3m}{4}$,$x_1x_2=\frac{m^2+8}{8}$,

所以 $y_1y_2=(-3x_1+m)(-3x_2+m)=9x_1x_2-3m(x_1+x_2)+m^2=\frac{9(m^2+8)}{8}-\frac{9m^2}{4}+m^2=-\frac{m^2}{8}+9$,

则 $k_1\cdot k_2=\frac{y_1-1}{x_1-3}\cdot\frac{-y_2-1}{-x_2-3}=\frac{y_1y_2+y_1-y_2-1}{x_1x_2+3x_1-3x_2-9}=\frac{-\frac{m^2}{8}+8-3(x_1-x_2)}{\frac{m^2}{8}-8+3(x_1-x_2)}=-1$,故 $k_1\cdot k_2$ 为定值-1.